N3295

Biblioteca „ASTRA" - Sibiu -

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1945

SUMARUL

1. Poliomologia triunghiurilor oarecari . *Cpt. Ing. I. Zamfirescu.*
2. Rezolvarea unui sistem de ecuaţii . . *D. V. Ionescu.*
3. Raport pentru decernarea premiului „Nicolae G. Botea" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Note matematice: 16 — 18.
5. Bibliografie.
6. Diverse.
7. Probleme rezolvate: 4540, 5875, 5877, 5891, 5894, 5896, 5904, 5940.
8. Exerciţii: 10—15.
9. Probleme propuse: 6055, 6065 — 6073.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1945

83505

22.

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier,

---

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **60**06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64. 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133.

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 250

POLIOMOLOGIA TRIUNGHIURILOR OARECARI [1])

1°. Fie două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$, omologice în ordinea ABC, $A_1B_1C_1$, adică unind A cu A_1, B cu B_1 şi C cu C_1, aceste 3 raze vectoare sunt concurente.

Se ştie că dacă cele 2 triunghiuri sunt omologice şi în ordinea ABC, $B_1C_1A_1$ ele sunt omologice şi în ordinea ABC, $C_1A_1B_1$ adică dacă sunt biomologice, sunt şi triomologice.

Omologiile de mai sus se deduc una din cealaltă, prin permutări circulare ale vârfurilor sau laturilor unuia din triunghiuri, atunci când se păstrează fixă ordinea în celălalt triunghiu.

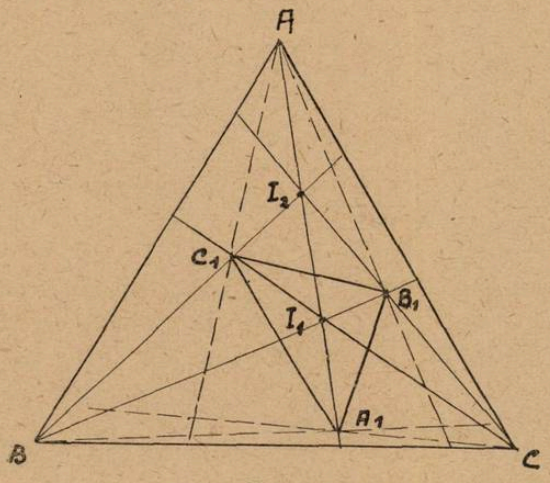


Fig. 1.

Este de remarcat că în acest caz, nu există distinct decât triunghiuri monoomologice şi triomologice.

Cele 3 omologii recunoscute ca posibile sunt deci ABC ($A_1B_1C_1$, $B_1C_1A_1$, $C_1A_1B_1$).

2°. Dar înafară de grupa precedentă, putem avea şi grupa de omologii următoarea: ABC ($A_1C_1B_1$, $C_1B_1A_1$, $B_1A_1C_1$).

Să considerăm biomologia:

$$ABC,\ A_1B_1C_1 \quad \text{şi} \quad ABC,\ A_1C_1B_1.$$

Aceasta nu mai atrage, prin permutări circulare o a treia omologie, omologiile sale neputându-se deduce una din alta prin permutări circulare.

Dar în acest caz putem vorbi de triunghiuri biomologice care pot să nu fie triomologice.

---

1) A se vedea articolul D-lui G. D. SIMIONESCU, Asupra triunghiurilor triomologice dela pag. 286, Vol. XLII.

83505

Figura 1 prezintă un asemenea caz.

Considerând deci grupele ABC ($A_1B_1C_1$) și ABC ($A_1C_1B_1$), cu fiecare putem avea câte trei omologii deduse prin permutări circulare și deci în total 6 omologii.

3°. Din cele precedente, rezultă că poate exista și numai biomologie dar mai rezultă de asemenea, că nu putem avea triomologie decât dacă omologiile respective fac parte din aceeași grupă, ca cele indicate mai sus. In caz că una din 3 omologii recunoscute, face parte din altă grupă decât celelalte două, vom avea în realitate tetraomologie.

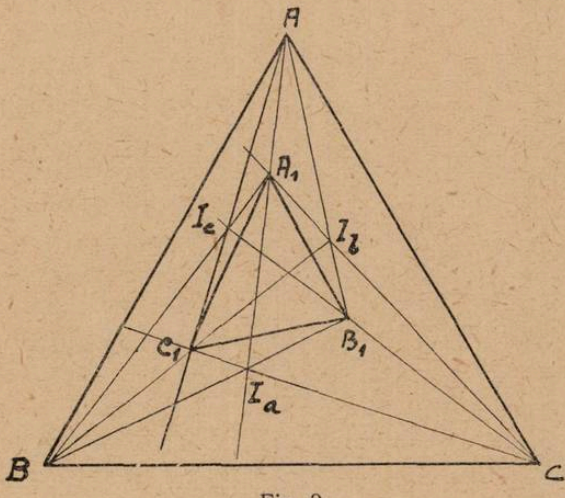


Fig. 2.

Dacă am presupune că am avea pentaomologie, ar rezulta că am avea și hexaomologie.

Rezultă că distinct ar trebui să existe omologie simplă, biomologie, triomologie, tetraomologie și hexaomologie.

4°. Cazul biomologiei distincte se poate construi considerând un triunghiu și un sistem de ceviene; luând pe una din ceviene un punct care va constitui al doilea centru de omologie și unindu-l cu celelalte 2 vârfuri, razele respective taie primele ceviene în vârfurile omologice ale nouii omologii. Pentru cazul figurii 1, se obțin vârfurile B_1 și C_1, iar pentru A_1 este bun orice punct pe ceviana inițiala din A (Fig. 2).

5°. Cazul unei triomologii ABC ($A_1B_1C_1$, $B_1C_1A_1$, $C_1B_1A_1$) se poate construi considerând trei ceviene în triunghiul ABC și luând punctele B_1 și C_1 pe cevienele din B și C. Unind A cu B_1 și B cu C_1, acestea concură în I, care unit cu C, taie ceviana din A în al treilea vârf A_1 (Fig. 2).

6°. O tetraomologie se obține luând pe una din cevienele punctului I, de exemplu AI, un punct I_a, care unit cu B și C dă pe cevienele din C și B punctele B_1 și C_1. Unind A cu B_1, dreapta AB_1 taie ceviana inițială BI într'un punct I_b care unit cu C, dă dreapta I_b C care taie pe AI în A_1 (Fig. 3).

In acest fel de construcție, punctul I este centru de omologie al omologiei ABC, $A_1B_1C_1$, iar celelalte 3 omologii aparțin grupei de omologii ABC ($A_1C_1B_1$) adică, dându-se o omologie se pot construi triunghiuri având toate cele 3 omologii ale celeilalte grupe, câte una pe fiecare din razele vectoare ale omologiei de referință.

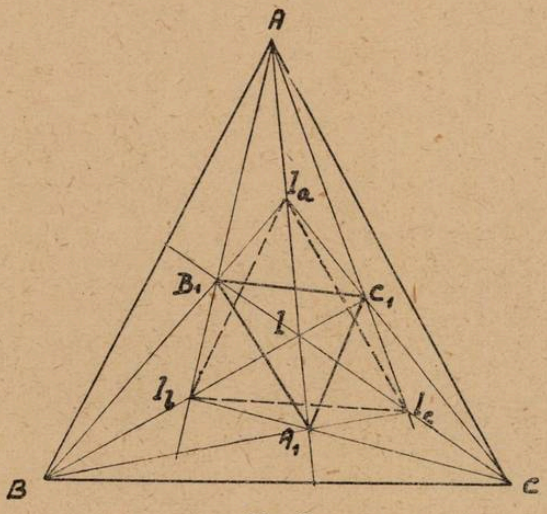


Fig. 3.

Din construcția precedentă se vede de asemenea că dacă se dau centrele de omologie I_a, I_b, I_c, omologia I rezultă imediat, dacă există.

7°. Dacă presupunem că am o a doua omologie din prima grupă, rezultă că se pot construi și pe razele vectoare ale acestia, cele 3 omologii ale celeilalte grupe și cum a doua omologie aduce și pe a treia, s'ar obține de 3 ori celelalte 3 omologii adică 9 omologii, ceea ce nu se poate. Dacă acestea se confundă, și omologiile grupei de referință se confundă, reducându-se totul la tetraomologie.

8°. Nu există deci penta și hexaomologie, iar poliomologia triunghiurilor oarecari se poate extinde numai la triomologie.

9°. Fie un triunghiu ABC și trei ceviene ale acestuia, în raport cu punctul I.

Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul pedal al acestor ceviene.

Laturile acestui triunghiu sunt tăiate de aceleași ceviene în punctele $A_2B_2C_2$ care sunt vârfurile triunghiului pedal ale acelorași ceviene în raport de triunghiul $A_1B_1C_1$.

Mai departe, avem analog triunghiurile pedale $A_3B_3C_3, \ldots,$ $A_n B_n C_n$ (Fig. 4).

Vom denumi triunghiul $A_1B_1C_1$, pedal de ordinul I al triunghiului ABC în raport de cevienele punctului I, apoi triunghiul $A_2B_2C_2$, pedal de ordinul 2 al aceluiaşi triunghiu ABC faţa de aceleaşi ceviene ale punctului I şi în fine, $A_n B_n C_n$, triunghiu pedal de ordinul n.

10°. Două triunghiuri pedale de diferite ordine în raport de acelaşi triunghiu şi de cevienele aceluiaşi punct, sunt triomologice.

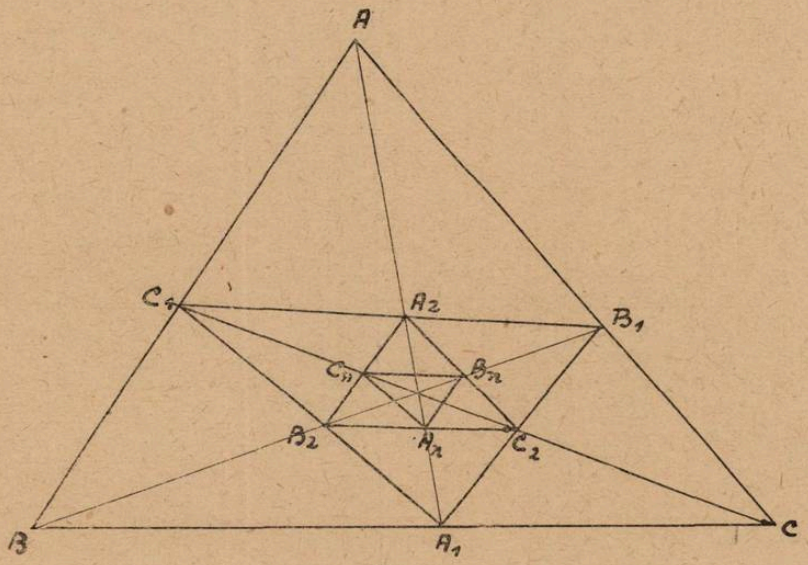


Fig. 4.

Intr'adevăr este uşor de văzut că în triunghiul ABC, dreapta B_1C_1, taie pe AB în conjugatul armonic al punctului A_1 faţă de B_1C_1, iar B_1C_1 însăşi este tăiată în conjugatul armonic al punctului A_2.

Este apoi uşor de văzut că dreapta B_2C_2 taie pe B_1C_1 în conjugatul lui A_2 şi analog se deduce că dreptele BC, B_1C_1, $B_2C_2, \ldots,$ $B_n C_n$ sunt concurente în acelaşi punct, piciorul conjugatei razei AI în raport de unghiul BAC.

Consider acum triunghiul ABC şi $A_n B_n C_n$.

Dreptele BC_n şi CB_n se taie în I_a, iar $IB_n I_a C_n BC$ este un patrulater complet în care $B_n C_n$ trebue să taie pe BC în conjugatul intersecţiei cu diagonala II_a. Dar $B_n C_n$ şi BC se taie în conjugatul intersecţiei lui BC cu AI, adică II_a şi AI au două puncte comune şi deci se confundă; rezultă că BC_n şi CB_n se taie pe AI. In mod analog se demonstrează că dreptele AC_n şi CA_n se taie pe BI în I_b, iar dreptele AB_n şi BA_n se taie pe CI în I_c şi deci triunghiurile ABC şi $A_n B_n C_n$ sunt tetraomologice corespunzător omologiilor: ABC, $A_n B_n C_n$ şi ABC $(A_n C_n B_n)$.

Se vede uşor că luând ABC, teorema nu pierde din generalitate deoarece, plecând dela ABC, se pot construi triunghiuri circumscrise de diferite ordine faţă de ABC în care ABC să fie un triunghiu pedal de ordinul p, iar $A_n B_n C_n$ să devină un triunghiu pedal de ordinul $p + n$.

CĂPITAN INGINER I. ZAMFIRESCU.

REZOLVAREA UNUI SISTEM DE ECUAŢII

1. In acest articol vreau să dau o metodă pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 x_2 x_3 &= A \\ x_1^2 y_1 + x_2^2 y_2 + x_3^2 y_3 &= B \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0 \\ y_1 y_2 y_3 &= C \\ x_1 y_1^2 + x_2 y_2^2 + x_3 y_3^2 &= D, \end{aligned}$$

unde A, B, C, D sunt numere date, iar x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 sunt necunoscute.

2. Să introducem necunoscuta auxiliară U definită de formula

$$(2)\qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = U$$

şi să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= U \\ x_1^2 y_1 + x_2^2 y_2 + x_3^2 y_3 &= B, \end{aligned}$$

în raport cu y_1, y_2, y_3.

Presupunând $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, avem

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ U & x_2 & x_3 \\ B & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}} = \frac{B - U(x_2 + x_3)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}.$$

Ţinând seamă de prima ecuaţie (1) se deduce

$$(3) \qquad y_1 = \frac{B + Ux_1}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}$$

şi la fel se deduce că

$$(3') \quad y_2 = \frac{B + Ux_2}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_2)}, \quad y_3 = \frac{B + Ux_3}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.$$

Să introducem acum aceste valori în ultimele două ecuaţii (1). Vom avea ecuaţiile

$$x_1 \frac{(B + Ux_1)^2}{(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_1)^2} + x_2 \frac{(B + Ux_2)^2}{(x_3 - x_2)^2 (x_1 - x_2)^2} + x_3 \frac{(B + Ux_2)^2}{(x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2} = D$$

$$\frac{(B + Ux_1)(B + Ux_2)(B + Ux_3)}{(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2} = -C,$$

care se mai scriu

$$(4) \quad U^2 \Sigma x_1^3 (x_3 - x_2)^2) + 2BU \Sigma x_1^2 (x_3 - x_2)^2 + B^2 \Sigma x_1 (x_3 - x_2)^2 = D(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2$$

$$(5) \quad U^3 x_1 x_2 x_3 + BU^2 \Sigma x_2 x_3 + B^2 U \Sigma x_1 + B^3 = -C(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2.$$

Să calculăm diferitele sume cari intră în ecuaţiile (4) şi (5). Pentru aceasta vom mai introduce necunoscuta auxiliară

$$(6) \qquad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = V.$$

Vom avea

$$\Sigma x_1 (x_3 - x_2)^2 = \Sigma x_2 x_3 (x_2 + x_3) - 6 x_1 x_2 x_3$$

şi ţinând seamă de prima ecuaţie (1), deducem că

$$(7) \qquad \Sigma x_1 (x_3 - x_2)^2 = -9A.$$

Mai avem

$$\Sigma x_1^2 (x_3 - x_2)^2 = 2\Sigma x_2^2 x_3^2 - 2x_1x_2x_3 \Sigma x_1 .$$

Ridicând la patrat formula (6), deducem

$$V^2 = \Sigma x_2^2 x_3^2 + 2(\Sigma x_1)\, x_1 x_2 x_3 ,$$

și ținând seamă de (1) vom avea

$$\Sigma x_1^2 (x_3 - x_2)^2 = 2V^2. \tag{8}$$

De asemenea avem

$$\Sigma x_1^3 (x_3 - x_2)^2 = \Sigma x_2^2 x_3^2 (x_2 + x_3) - 2(\Sigma x_1^2)\, x_1 x_2 x_3$$
$$= - x_1 x_2 x_3 \Sigma x_2 x_3 + 4x_1 x_2 x_3 \Sigma x_2 x_3$$

adică

$$\Sigma x_1^3 (x_3 - x_2)^2 = 3AV. \tag{9}$$

In sfârșit trebue să mai calculăm

$$(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}^2$$

care se mai scrie

$$(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 = \begin{vmatrix} 3 & x_1 + x_2 + x_3 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 & x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \end{vmatrix} .$$

Rădăcinile x_1, x_2, x_3 sunt date de ecuația de gradul al treilea

$$X^3 + VX - A = 0 \tag{1}$$

și găsim

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad ; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2V$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3A \quad ; \quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2V^2.$$

Rezultă că

$$(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2V \\ 0 & -2V & 3A \\ -2V & 3A & 2V^2 \end{vmatrix}$$

adică

$$(x_2 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 = -(4V^3 + 27A^2). \tag{10}$$

Ţinând seama de formulele (6), (7), (8), (9), (10) şi (11), ecuaţiile (4) şi (5) devin

$$(12)\quad 3AVU^2+4BUV^2-9AB^2=-D(4V^3+27A^2)$$

$$(13)\quad AU^3+BU^2V+B^3=C(4V^3+27A^2).$$

Rămâne acum să rezolvăm acest sistem de ecuaţii în U şi V.

3. Să înmulţim ecuaţia (12) cu U şi ecuaţia (13) cu $-3V$ şi să adunăm; vom obţine

$$(14)\quad BV^2U^2-9AB^2U=-(DU+3CV)(4V^3+27A^2)+3B^3V).$$

Inmulţim acum ecuaţia (12) cu BV şi ecuaţia (14) cu $-3A$ şi adunăm; vom obţine

$$(4V^3+27A^2)[B^2U+DBV-3A(DU+3CV)]=0.$$

Suprimând factorul $4V^3+27A^2$ care este diferit de zero, pentrucă am presupus că $x_1\neq x_2\neq x_3$, vom avea

$$(15)\quad U=\frac{9AC-BD}{B^2-3AD}V.$$

Purtând această valoare a lui U în ecuaţia (13) vom obţine ecuaţia binomă

$$(16)\quad V^3=\frac{27A^2C-B^3}{A\left(\frac{9AC-BD}{B^2-3AD}\right)^3+B\left(\frac{9AC-BD}{B^2-3AD}\right)^2-4C}.$$

Rezolvarea sistemului de ecuaţii (12), (13) este astfel făcută.

4. *In rezumat sistemul de ecuaţii* (1) *este rezolvat de formulele* (16), (15), (10) şi (3) *care dau succesiv necunoscutele auxiliare* V *şi* U, *apoi pe* x_1, x_2, x_3 *şi în fine pe* $y_1y_2y_3$.

5. Metoda precedentă se aplică în ipoteza că necunoscutele x_1, x_2, x_3 sunt diferite între ele. Să tratăm acum rezolvarea sistemului (1) când două din aceste necunoscute, sau toate sunt egale.

a) Dacă $x_1=x_2=x_3$, ecuaţiile (1) arată că

$$x_1=x_2=x_3=0,$$

şi trebue să avem

$$A=B=D=0.$$

y_1, y_2, y_3 sunt date de ecuaţia de gradul al treilea

$$Y^3=\lambda Y-C=0,$$

λ fiind o constantă arbitrară.

b) Să presupunem că

$$x_1 = x_2 .$$

Ecuațiile (1), devin în acest caz

$$(17)\qquad \begin{array}{ll} 2x_1 + x_3 = 0 & y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ x_1^2 x_3 = A & y_1 y_2 y_3 = C \\ x_1^2 (y_1 + y_2) + x_3^2 y_3 = B & x_1 (y_1^2 + y_2^2) + x_3 y_3^2 = D. \end{array}$$

Să găsim relația de condiție, pentru ca acest sistem să fie compatibil.

Primele două ecuații (17) determină pe x_1 și pe x_3

$$(18)\qquad x_1 = -\frac{x_3}{2} \quad , \quad x_3^3 = 4A.$$

A treia și a patra ecuație (17) ne dă

$$(19)\qquad y_3 = \frac{B}{x_3^2 - x_1^2} = \frac{4B}{3x_3^2} = \frac{B}{3A} x_3 .$$

Ținând seamă de aceasta, ultima ecuație (17) ne dă

$$x_1 (y_1^2 + y_2^2) = D - \frac{4B^2}{9A} .$$

Insă

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 - 2y_1 y_2$$

și

$$x_1 (y_1^2 + y_2^2) = -\frac{x_3}{2} \cdot \left(\frac{B}{3A} x_3\right)^2 + x_3 y_1 y_2$$

adică

$$x_1 (y_1^2 + y_2^2) = x_3 y_1 y_2 - \frac{2B^2}{9A} .$$

Rezultă că

$$(20)\qquad x_3 y_1 y_2 = D - \frac{2B^2}{9A} .$$

Impărțind această ecuație cu penultima ecuație (17) se deduce

$$(21)\qquad \frac{x_3}{y_3} = \frac{D}{C} - \frac{2B^2}{9AC} .$$

Dar după ecuația (19), avem

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{3A}{B} .$$

Rezultă că relaţia de condiţie este

$$\frac{3A}{B} = \frac{D}{C} - \frac{2B^2}{9AC}. \tag{22}$$

In ce priveşte rezolvarea sistemului (17), primele două ecuaţii determină pe x_1 şi x_3, ecuaţia (21) determină pe y_3 iar y_1 şi y_2 sunt date de ecuaţiile

$$y_1 + y_2 = -y_3 \quad , \quad y_1 y_2 = \frac{C}{y_3}.$$

D. V. IONESCU
Profesor la Facultatea de Ştiinţe
din Cluj-Timişoara.

RAPORT PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „NICOLAE G. BOTEA"

Subsemnatul, membru în Comisiunea pentru acordarea premiului « NICOLAE G. BOTEA », având în vedere condiţiile regulamentului şi activitatea corespondenţilor în volumul XLIX al *Gazetei Matematice*, propun ca premiul « NICOLAE G. BOTEA » să fie decernat Domnului P. P. DRĂGHICESCU (elev Şcoala Ofiţeri Geniu).

Domnia-Sa şi în acest an are o activitate bogată în Geometria triunghiului, din care citãm:

1°. Soluţia şi generalizarea dată problemei 5454;

2°. Soluţiile problemelor 4920, 5532, 5768;

3°. Problema propusă Nr. 5984.

Articole sau note de Geometria triunghiului, în condiţiile regulamentului premiului nu sunt în volumul XLIX al *Gazetei Matematice*.

PROFESOR C. IONESCU-BUJOR.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea generală din 21 August 1944.

NOTE MATEMATICE

16. *Variația suprafeței „perimetrelor“!* Când s'a făcut Legea Minelor în anul 1895, cei care au alcătuit-o și au discutat-o în Corpurile Legiuitoare nu prea erau matematicieni și de aceea s'a făcut confuzia între *conturul* și *conținutul* unei figuri, între *perimetrul* și *aria* închisă de un perimetru.

Din această cauză în actele de concesiune pentru explorări și exploatări de terenuri miniere și petrolifere se găsesc deseori perimetre exprimate în hectare, metri patrați, și chiar decimetri patrați. Prin acte se găsesc expresiuni ca:

„Perimetru cu o suprafață de . . . hectare“.

„Perimetru sub forma unui paralelogram . . . . . .

. . . . . .

In anul 1927 fusesem numit într'o Comisiune pentru cercetarea unor fraude petrolifere, în care era vorba de perimetre greșit măsurate, greșit calculate, greșit aplicate, și de aci cereri numeroase de rectificări și completări de suprafețe concedate.

Eu m'am retras din acea Comisiune din cauză că mi se cerea să stabilesc repede răspunderile, ceea ce nu se putea face întru cât trebuiau căutate izvoarele erorilor semnalate. Bănuisem că erorile nu provin din lipsă de cunoștințe inginerești la măsurători sau la calcule ci că unele din ele erau provocate de nepreciziuni geologice. Se cerea o concesiune și se făceau cercetări care arătau că într'o anumită porțiune a terenului concedat, sau a „perimetrului“ concedat se poate avea o rentabilitate mai mare ca în altele.

Astfel fiind, dacă se ceda prin acte o suprafață S, se măsura pe teren o suprafață S′ mai mică decât S, încât, în mod intenționat să se ceară mai târziu completarea suprafeței (S — S′) în partea cea mai favorabilă a terenului concesionat. Aceste erau *erori voite, interesate,* prin care se urmărea mărirea rentabilității concesiunii. De curând însă, mi s'a adus la cunoștiință acte oficiale, din care rezultă erori provocate de neștiință sau neatenție la măsurători și la calcule de „perimetre“. Un caz extraordinar îl semnalez aici, pentru ca să se vadă că selecționarea inginerilor topometri trebuie să se facă cu toată severitatea.

In anul 1899 un teren în formă de *paralelogram* cu laturile de 440 m şi 900 m şi cu unghiurile de 76° 30′ şi 103° 30′ a fost concesionat la doi concesionari A şi B, primului 26 ha şi celuilalt 13 ha 6000 m². In anul 1905 aceste concesiuni s'au trecut altora.

Noul concesionar al primului loc a reclamat că îi lipseşte 3 ha 4220 m² şi cerea să i se completeze terenul până la 26 ha cât avea concesiunea respectivă. Se trimite o anchetă; ce credeţi că s'a constatat? S'a găsit că suprafaţa totală concesionată în 1899, de $26 + 13{,}6000 = 39{,}6000$ ha a fost obţinută calculându-se aria paralelogramului ca la un dreptunghiu, adică făcându-se produsul laturilor adiacente, fără a ţine seamă de unghiurile paralelogramului.

Suprafaţa reală a paralelogramului este evident mai mică ca a dreptunghiului cu aceleaşi laturi, şi de aci diferenţa găsită de concesionarul din 1905.

Calculatorul se vede că nu a ştiut cum să ţină seamă de unghiurile paralelogramului la calculul suprafeţei paralelogramului.

Las pe cititori să facă comentariile pe care le vor crede de cuviinţă.

I. IONESCU

Fost decanul colegiului inginerilor.

17. *Asupra problemei 5692.* „Un cetitor al revistei“ din Iaşi — căci aşa semnează — ne atrage atenţia că problema are *43 soluţii* şi ne mai face atenţi că în prima soluţie este scris $\sqrt{200} < 11$, ceea ce nu-i adevărat.

Ii mulţumim şi facem cuvenita rectificare la soluţia publicată la pag. 470, Vol. XLVIII.

I. La prima soluţie avem $\sqrt{200} < 15$, deci avem şi numărul 13 care este prim.

II. La a doua soluţie de asemenea avem numai 37 numere divizibile cu 231.

III. La soluţia 3-a termenul al 20-lea de forma $E(x)$ se va scrie sub forma: $E\left(\frac{200}{2 \cdot 5 \cdot 11}\right)$.

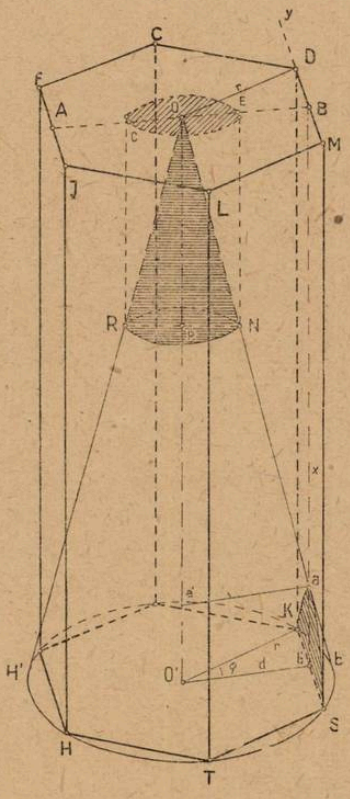
Apoi vom avea:

$$I_{200}\,(231\,.\,200) = 200 - [100 + 66 + \underline{40} + 28 + 18] + [33 + 20 + 14 + 9 + 13 + 9 + 6 + 5 + 3 + 2] - [6 + 4 + 3 + 2 + 1 + \underline{1} + \underline{1} + \underline{1} + 0 + 0] = 43$$

cifrele subliniate au fost rectificate.

I. L.

18. *Asupra problemei 4879.* Problema cere să se calculeze volumul lemnului îndepărtat din un creion exagonal, ascuțit cu o mașină. Soluția care s'a dat la pag. 575, Vol. XLIX, este greșită. S'a considerat că intersecția prismei creionului cu conul ascuțitoarei este un cerc. In realitate acea curbă este formată din 6 arce de iperbolă.



Deci, din volumul prismei creion, trebue scăzut volumul conului, micșorat cu cele 6 volume din conul HOK lăsate înafară de către prisma creionului. Fie v volumul solidului care e determinat în con și e cuprins între segmentul circular Sbk și segmentul Sak din iperbolă adică volumul solidului Sabk.

Notăm cu V_σ volumul conului cu vârful în O și cu baza Sbk și cu V_s volumul conului cu vârful în O și cu baza segmentul Sak.

Cu notațiile din figură, avem:

$$V_\sigma = \frac{h}{3}(\varphi r^2 - r^2 \sin\varphi \cos\varphi)$$

Raportând iperbola Sak la axele sale Ba și BD, coordonatele punctelor a și k se deduc ușor. Ducem generatoarea Oab și prin a o paralelă la O'b, care întâlnește pe OO' în a'.

Din asemănarea triunghiurilor Oaa' și $OO'b$, se deduce

$$Oa' = Ba = \frac{aa' \times OO'}{O'k} = \frac{hd}{r}$$

unde $h = OO'$.

Deci coordonatele lui a sunt $\left(\frac{hd}{r}, 0\right)$.

Pe figură se vede că $KD = h$, $kb' = r \sin\varphi$.

Deci coordonatele lui K sunt $(h, r \sin\varphi)$.

Punând condiția ca iperbola să treacă prin aceste puncte, obținem ecuația ei:

$$\frac{r^2}{h^2 d^2} x^2 - \frac{1}{d^2} y^2 = 1$$

deci

$$s = \text{aria segm. iperbolic } KaV = 2d \int_{\frac{hd}{r}}^{h} \sqrt{\frac{r^2}{h^2 d^2} x^2 - 1}\, dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $z = \frac{rx}{hd}$, obținem:

$$s = \frac{2d^2 h}{r} \int_1^{\frac{r}{d}} \sqrt{z^2 - 1}\, dz = \frac{d^2 h}{r} \left[\frac{r}{d} \sqrt{\frac{r^2}{d^2} - 1} - L\left(\frac{r}{d} + \sqrt{\frac{r^2}{d^2} - 1} \right) \right].$$

Observăm că înălțimea conului V_s este OB, adică d. Deci:

$$V_s = \frac{d^3 h}{3r} \left[\frac{r}{d} \sqrt{\frac{r^2}{d^2} - 1} - L\left(\frac{r}{d} + \sqrt{\frac{r^2}{d^2} - 1} \right) \right].$$

Pentru a nu mai schimba și celelalte calcule, vom considera că adâncimea părții ascuțite este măsurată pe *generatoare*, așa cum s'a presupus în soluția dată problemei la pag. 575, Vol. XLIX, G. M.

Avem:

$$V_\sigma = 2 \cdot \frac{14,21}{6} \cdot \left[\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \times 4,6^2 = 9,021 \text{ mm}^3.$$

$$V_s = 2 \cdot \frac{4^3 \times 14,21}{6 \times 4,6} \left[\frac{4,6}{4} \sqrt{\frac{4,6^2}{4^2} - 1} - L\left(\frac{4,6}{4} + \sqrt{\frac{4,6^2}{4^2} - 1} \right) \right] = 7,908 \text{ mm}^3$$

Deci $v = V_\sigma - V_s = 9{,}021 - 7{,}908 = 1{,}113$ mm³.

Diferența pentru toate fețele este de 6,678 mm³, iar volumul lemnului îndepărtat este

$$447{,}677 + 6{,}678 = 454{,}355 \text{ mm}^3.$$

OTILIA GEORGESCU ROEGEN.

BIBLIOGRAFIE

Buletinul Politechnicei din București. Anul XV, 1944. Nr. 1—4. N. RACLIȘ: Démonstration du grand théorème de FERMAT pour des grandes valeurs de l'exposant. ȘERBAN GHEORGHIU: Sur la théorie de l'équilibre économique. I. CĂRSTOIU: Le mouvement à la POINSOT généralisé. D. T. DUMITRESCU: Quelle bezw. senke im Kreisrohre. I. LINTEȘ: Sur l'écoulement d'un gaz sous grande pression et avec grande vitesse. M. G. LIVADA: Physical and mechanical properties of the Russian wood intended for aeronautical constructions. M. G. LIVADA: Note sur l'influence de l'inspection technologique sur les résultats des essais du bois d'aviation. ER. TOPORESCU: La formation d'un composé de cobalt de couleur verte. C. C. GEORGESCU und P. CREȚOIU: Zwei Eichenformen aus Rumänien. E. CARAFOLI et E. E. STIHI: Sur les trajectoires des bombes d'avion. V. TH. CERCHEZ: Beiträge zum Kenntnis der Sulfonsäuren aus Gasöl.

Buletinul Societății Politechnice din România. Anul LVIII. Nr. 5—8. Mai-August 1944. GH. BOGDAN: Câteva considerațiuni asupra problemei detectării gazelor de mină. EM. GOILAV: Semnalizarea macazelor întredeschise. E. VINTILĂ: Incercări pe cale micrologică asupra durabilității materialelor lemnoase.

Mathematica. Vol. XX, apărut la 25 August 1944. Omagiu D-lui PROF. D. POMPEIU. GINO LORIA: Perfectionnements, évolution, métamorphoses du concept de „coordonnées". EPH. MARCUS: Sur les cycles de LAPLACE de période quatre. GUSTAVE CHOQUET: L'isométrie des ensembles dans ses rapports avec la théorie du contact et la théorie de la mesure. C. C. TEODORESCU: Sur la déformation autour d'un point. M. DRĂGANU: Sur une solution opératoire de l'équation de la propagation des ondes. ARNAUD DENJOY: Sur la représentation conforme des aires planes. G. BOULIGAND: Sur quelques précautions nécéssitées par l'exposé des conditions générales propres à l'intervention d'un groupe. JEAN-LOUIS DESTOUCHES: Remarques sur l'association d'un groupe à une propriété au sens de Mr. G. BOULIGAND. G. VRÂNCEANU: Geometrische Eigenschaften der partiellen linearen Differential-Gleichung zweiter Ordnung. V. VÂLCOVICI: Sur la distribution des axes principaux

d'inertie. N. CIORĂNESCU: Sur la détermination des fonctions harmonique par leurs valeurs sur des variétés caractéristiques. AL. GHIKA: Sur la nature fonctionnelle des fonctions quasi-analytiques générales. R. BĂDESCU: Sur une méthode d'investigation utilisée pour résoudre certains problèmes de la chimie du sol. J. CÂRSTOIU: Sur la condition des accélérations dans un fluide incompressible.

Revista Matematică din Timişoara. Vol. XXIV. Nr. 10. Decembrie 1944. M. GHERMĂNESCU: Un sistem diofantian. AND. DOBRESCU: Asupra unor cercuri ortogonale şi unor sfere ortogonale. Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXX. Nr. 2—3. Iaşi-Alba Iulia. Aprilie-Septembrie 1944. EM. POP: Trecutul pădurilor noastre dela sfârşitul terţiarului până azi. FL. CIORĂSCU: Descărcările electrice din atmosferă. C. POPP: Cunoaşterea plantelor medicinale în antichitate. I. G. BOTEZ: Staţia zoologică maritimă Agigea. CONSTANŢA MORUZI: Caractere legate de sex şi transmisie mendelian. Şt. PROCOPIU: Măsuri de geofizică în România. MAGDA ALEXA: GALILEO GALILEI.

România Aeriană. Anul XVIII. Nr. 9—10. Sept.-Oct. 1940. *« România Aeriană »:* Aviaţia noastă civilă. C-DOR I. LINTEŞ: Dinamismul şi legenda oamenilor practici. E. DIACONESCU-ARNOU: Atragerea tranzitului aerian. M. KONTESCHWELLER: Intrebuinţările telemecanicei. R. SVILOKOSICI: Controlul sau desfiinţarea armamentelor statelor agresoare. VALENTIN POPESCU: Instructori de sbor, sau profesori de educaţie aviatică? MARIANA DRĂGESCU: AMELIA EARHART. CUŢI DACIAN: Sborul fără vizibilitate dă pilotului un aspect de... contabil. LAELIUS POPESCU: Aerobusul stratosferic.

DR. ING. A. AVRAMESCU. Beiträge zur Erwärmungsberechnung elektrischer Leiter. Imprimeria Naţională. Bucureşti 1944.

ŞERBAN GHEORGHIU. Sur la théorie de l'équilibre économique. (Ext. din Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine. Tome XXVI).

I. IONESCU. Povestiri technice. Trei sute de exemplare legate, tipărite sub îngrijirea D-lor ING. AUREL IOANOVICI, EMIL PRAGER, D. STAN, ION VARDALA şi îngrijită tipărirea de D-şoara ELENA FILIPESCU, prin următoarea prezentare a autorului, de către D-l I. VARDALA:

Profesorul Ion Ionescu.

In şirul foarte bogat şi de calitate al scrierilor şi al publicaţiilor profesorului ION IONESCU, *se aliniază şi de data aceasta o nouă carte de valoare, care, la fel cu toate cele care au precedat-o, desvălue publicului nostru comorile de cunoştinţe, de inteligenţă, de voinţă şi de muncă creatoare care alcătuesc distinsa şi originala personalitate a autorului.*

Toate aceste virtuţi şi calităţi nu înfăţişează însă decât o latură a insuşirilor prietenului al cărui portret mă străduesc să-l schiţez aci.

Intr'adevăr, viaţa, activitatea şi realizările profesorului şi inginerului ION IONESCU, *au desvoltat şi întreţinut în plus, în jurul lui, o*

atmosferă de o înaltă și rară valoare morală, căci dânsul nu a urmat cărările care duc la succese ușoare nici cele care asigură interesele personale; nu a urmărit popularitatea nici captarea simpatiilor, ci a căutat în lunga și frumoasa lui carieră, să formeze creerul și caracterul tinerilor noștri ingineri, să le infiltreze dragostea de adevăr, de muncă, și de Patrie, printr'o disciplină nesovăelnică și severă, care i-a pricinuit, poate unele greutăți, dar și satisfacția de a fi contribuit, în mare măsură, la formarea elitelor noastre inginerești și la ridicarea nivelului cultural al scumpei noastre Țări.

ION VARDALA
Inginer inspector general.

DIVERSE

a) Redacționale

In fața scumpirii crescânde a prețurilor a fost nevoie să se reducă formatul revistei la 32 de pagini. Nu este exclusă posibilitatea unor noui reduceri ulterioare. « *Gazeta Matematică* » a mai trecut prin astfel de greutăți în anii 1916—19 când volumele XXII—XXIV au fost tipărite în un număr redus de pagini și cu o hârtie de o calitate foarte inferioară pentru ca apoi să apară în volume de peste 600 pagini și în foarte bune condițiuni. Dorim și sperăm să ieșim cât mai repede din criza actuală care lovește toate sectoarele economice ale lumii.

b) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

RICHARD KLIMPERT. Lehrbuch über das spezifische gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper, nach System KLEYER. Stuttgart 1891.

RICHARD KLIMPERT. Lehrbuch der Statik Flüssiger Körper nach System KLEYER. Stuttgart 1891.

Donate de D-l ION IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4540. *Se consideră două drepte* Δ *și* Δ' *în același plan. Se ia un punct* A *fix pe* Δ *și un punct* M *mobil pe* Δ'. *Se construește triunghiul isoscel* AMB *cu vârful în* M *și cu baza* AB *pe* Δ. *Se mai consideră punctul* N, *simetric al lui* A *în raport cu* Δ'. *Perpendiculara în* N *pe* AM *se întâlnește cu perpendiculara în* B *pe* MB *într'un punct P al cărui loc se cere.*

N. BOTEA.

Soluție dată de D-l MIRCEA A. NEGREA (Brăila):

Se ia A ca origină a sistemului de axe dreptunghiulare, Δ ca axă Ox. Ecuația dreptei Δ' este

$$(\Delta') \qquad y = mx + n;$$

u fiind un parametru,

$$B(2u, 0) \quad , \quad M(u, mu + n),$$

deci

$$(PB) \qquad y = \frac{u}{mu + n}(x - 2u). \qquad (1)$$

Coordonatele lui N se află imediat, fiind de două ori coordonatele punctului de intersecție al dreptei Δ' cu o perpendiculară coborîtă din A pe Δ', adică

$$N\left[\frac{-2mn}{m^2+1} \quad , \quad \frac{2n}{m^2+1}\right],$$

iar dreapta PN este

$$y - \frac{2n}{m^2+1} = -\frac{u}{mu+n}\left(x + \frac{2mn}{m^2+1}\right). \qquad (2)$$

Ecuațiile locului lui P se află eliminând parametrul u între (1) și (2).

Din (2) extragem:

$$u = \frac{-n[(m^2+1)y - 2n]}{(m^2+1)(my+x)}$$

și înlocuind în (1), se găsește

$$\frac{2n^2m + nx(m^2+1)}{(m^2+1)(my+x)}y = \frac{-n[(m^2+1)y - 2x]}{(m^2+1)(my+n)} \times \left[x + \frac{2n[(m^2+1)y - 2n]}{(m^2+1)(my+x)}\right] \quad \therefore$$

$$(m^2+1)(my+x)[(m^2+1)xy + mny - nx] + n[(m^2+1)y - 2n] = 0.$$

Locul este deci o *cubică*.

Egalând valorile lui y din (1) și (2), găsim

$$x = u + \frac{n^2}{u(m^2+1)}, \qquad y = \frac{u}{mu+n}\left[\frac{n^2}{u(m^2+1)} - u\right]$$

deci cubica este *unicursală*, pentru că x, y sunt funcțiuni raționale de parametru.

Altă soluție dată de D-l MARCEL AMĂRĂȘTEANU.

C. I. B.

PROBLEMA 5875. *Să se dea o soluție aritmetică următoarei probleme cunoscută, din timpurile când sistemul monetar era al uniunii latine:*

„Unui funcționar i se dă la permutarea dintr'un oraș la altul câte 16 bani de fiecare kilometru distanță între punctul de plecare și cel de sosire și de fiecare membru al familiei care a trecut de 3 ani etate, dacă distanța de mutare este mai mică decât 100 km și câte 11 bani pentru fiecare km ce trece peste 100 km. La o permutare când ultimul copil nu avea încă 3 ani a luat 185 lei, iar în urmă, după ce acel copil a trecut peste 3 ani și pentru o distantă cu 75 km mai mică, i s'a dat 190 lei. La ce distanță a fost permutat în cele două rânduri și câți copii are, știind că soția îi trăiește.

I. IONESCU.

Transformăm cele două sume primite în bani:

$$185 \text{ lei} = 18500 \text{ bani} \quad \text{și} \quad 190 \text{ lei} = 19000 \text{ bani.}$$

Prima transferare a fost cu siguranță la mai mult de 100 km căci altfel la a doua mutare nu ar fi parcurs decât *maximum*

$$99 - 75 = 24 \text{ km}$$

și cum suma de 19000 bani pe care o ia la a doua mutare este egală cu produsul între 11, indemnitatea de mutare pe km, numărul km maximum 24 și numărul N al membrilor familiei, am avea

$$19000 = 11 \times 24 \times N \quad \therefore \quad N \geqslant 70$$

ceea ce este imposibil, oricât de prolifică ar fi o familie într'o religie nepoligamă. Imposibilitatea e și mai evidentă dacă numărul de km este mai mic de 24.

Deci prima transferare se face la mai mult de 100 km. In acest caz suma de 18500 bani pe care o încasează funcționarul se compune din suma banilor pe care o primește pe prima sută de km, care este de forma $16 \times 100 \times M$ și suma banilor pe care-i primește pentru numărul de km care depășesc 100 km, suma care este de forma 11N.

Vom avea deci

$$18500 = 16 \times 100 \times M + 11 \times N. \qquad (1)$$

Cum M şi N sunt întregi rezultă că N este multiplu de 100, adică 100 P şi atunci

$$18500 = 16 \times 100M + 100 \times 11 \times P \qquad (2)$$

$$\therefore \quad 185 = 16 . M + 11 . P.$$

P este nepereche şi mai mic decât 17 căci $11 \times 17 = 187$. Dând lui P valorile neperechi posibile găsim că numai pentru $P = 11$ diferenţa $(185—11P)$ se divide cu 16, dar pentru această valoare obţinem $M = 4$ şi (2) dă

$$185000 = 4 \times 16 \times 100 + 11 \times 11 \times 100 \qquad (3).$$

Produsul 16×100 reprezintă banii primiţi de fiecare membru al familiei care a trecut de 3 ani. Deci numărul acestor membri este factorul rămas, 4 din prima parte a sumei dela (3). Produsul 11×100 reprezintă produsul dintre numărul membrilor sub 3 ani ai familiei şi numărul km peste 100 km. Acest din urmă număr va fi

$$\frac{1100}{4} = 275.$$

Numărul total de km este

$$100 + 275 = 375.$$

Numărul km la a doua permutare este egal cu

$$375 - 75 = 300$$

iar numărul membrilor, cu drept de indemnizare de transport este $4 + 1 = 5$.

Concluzia: Funcţionarul are 3 copii şi a fost transferat prima oară la 375 km iar a doua oară la încă 300 km.

MIRCEA I. PĂTRĂŞCIOIU
(Clasa a VII-a Liceul Buzău).

S'au mai primit soluţii bune dela D-nii: M. SP. MANOLIU (Liceul „Codreanu", Bârlad) şi M. R. CONSTANTINESCU (Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti).

D-l I. GH. BARBU (Liceul Caracal) a rezolvat problema prin analiza nedeterminată.

PROBLEMA 5877. *Să se rezolve în numere întregi sistemul:*

$$E\left(\frac{x}{y}\right)=3 \quad ; \quad E\left(\frac{x}{y}\right)^2=11$$

unde $E(i)$ *înseamnă întregii lui* i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Ştim că:

$$E\left(\frac{x}{y}\right)^2=\left[E\left(\frac{x}{y}\right)\right]^2+E\left[2\,\frac{r_x}{y}\,E\left(\frac{x}{y}\right)\right].$$

Prin urmare sistemul se reduce la:

$$E\left(\frac{x}{y}\right)=3 \quad \text{şi} \quad E\left(\frac{6\,.\,r_x}{y}\right)=2.$$

Deci:

$$x=3\,.\,y+r_x \quad \text{şi} \quad 6\,.\,r_x=2\,.\,y+i$$

unde avem:

$$0\leqslant r_x<x \quad \text{şi} \quad 0\leqslant i<y.$$

De aci deducem că:

$$6x=18\,.\,y+6r_x=20\,.\,y+i.$$

Adică:

$$20\,.\,y\leqslant 6\,.\,x<21\,.\,y \quad \therefore \quad \frac{10}{3}\,.\,y\leqslant x<\frac{7}{2}\,.\,y.$$

Această condiţie ne dă soluţiile, dând lui y diferite valori şi luând pentru x numai valorile întregi. Astfel avem:

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
x	—	—	10	—	17	20	24	27	30	34	...

Au rezolvat problema pe căi ceva mai lungi, dând toate soluţiunile D-nii: C. C. ILIESCU, M. MANOLIU, D. CONSTANTINESCU, G. D. BRAŞOVEANU, C. C. DIACONU şi GH. VRÂNCEANU.

Celelalte soluţii primite sunt eronate.

I. L.

PROBLEMA 5891. *Să se rezolve în numere întregi ecuaţia :*

$$E\left(\frac{x}{5}\right) = E\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2,$$

unde E (*i*) *înseamnă întregii lui* i.

COMANDOR I. LINTEŞ.

Punem :

$$E\left(\frac{x}{5}\right) = y$$

deci

$$x = 5 . y + \alpha$$

şi cum :

$$E\left(\frac{x+2}{3}\right) = y + 2,$$

urmează că :

$$x + 2 = 3 (y + 2) + \beta$$

unde α şi β sunt respectiv mai mici decât 5 şi 3.

De aci deducem că :

$$x = 5 . y + \alpha = 3 . y + 4 + \beta$$

sau :

$$2y + \alpha = 4 + \beta,$$

relaţie care ne dă toate soluţiunile, făcând :

$$\alpha = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \text{şi} \quad \beta = 0, 1, 2.$$

Astfel avem :

α	0	1	2	3	4
y	2 ; 3	2	1 ; 2	1	0 ; 1
x	10 ; 15	11	7 ; 12	8	4 ; 9

Au rezolvat problema pe o cale ceva mai lungă, dând toate soluţiunile, D-nii : C. C. ILIESCU (clasa a VIII-a, Colegiul N. M. „N. F.", Predeal) şi G. G. VRÂNCEANU (Liceul Militar, Timişoara).

O soluţie incomplectă a trimis D-l M. MANOLIU.

I. L.

PROBLEMA 5894. *Să se studieze seria*

$$u_n = \frac{(c+a)\,(2c+a)\,\ldots\,[(n-1)\,c+a]}{(c+b)\,(2c+b)\,\ldots\,[(n-1)\,c+b]}$$

a, b, c fiind pozitive.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: CRISTU I. CANTUNIAR (liceul Titu Maiorescu, București); ILIE N. CONSTANTINESCU (liceul N. Bălcescu, Brăila); AUREL CUBAT; P. P. DRĂGHICESCU (student-inginer); MIHAI MANOLIU (liceul Codreanu, Bârlad); TRAIAN V. MUSTĂCESCU (liceul Titu Maiorescu, București); MARIN F. VĂDUVA (student inginer); EUGEN N. WEGENER (București).

Aplicând criteriul D'ALEMBERT, avem:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{nc+a}{nc+b} = 1.$$

Deci nedeterminare. Aplicăm criteriul RAABE-DUHAMEL:

$$\lim_{n=\infty} \left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\right] = \lim_{n=\infty}\left[n\left(\frac{nc+b}{nc+a} - 1\right)\right] = \lim_{n=\infty} \frac{n(b-a)}{nc+a} = \frac{b-a}{c}$$

deci dacă $b-a>c$ seria este convergentă; dacă $b-a<c$ seria este divergentă. Dacă $b=a+c$ avem

$$u_n = \frac{c+a}{nc+a}$$

și luând ca serie de comparație seria divergentă $v_n = \frac{1}{n}$, avem:

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

deci seria u_n este și în acest caz divergentă.

PROBLEMA 5896. *Să se construiască un triunghiu căruia i se cunoaște perimetrul, diferența între latura cea mai mare și latura mijlocie și diferența între latura mijlocie și latura cea mai mică.*

G-L GH. BUICLIU.

Soluție geometrică, dată de D-l ALEXANDRU AL. TIMOTIN (Absolvent, Lic. „Gh. Lazăr", București).

Pe o dreaptă Δ luăm lungimea PP' egală cu perimetrul dat. Dacă $a < b < c$ sunt laturile triunghiului căutat, luăm pe Δ dela P' spre P lungimea PD egal cu diferența dată $c - b$. Vom avea

$$PD = a + b + c - c + b = a + 2b.$$

Dela D spre P luăm lungimea DB egală cu dublul diferenței $b - a$. Obținem segmentul PB, definit astfel

$$PB = PD - 2(b - a) = a + 2b - 2(b - a) = 3a.$$

Lungimea BC dela B spre P și egală cu a treia parte din PB este deci latura cea mai mică a. Luăm dela B spre P' lungimea BE egală cu $b - a$ și dela C spre P lungimea $C'C$ egală cu $c - a$ și obținem astfel lungimile $CE = b$ și $BC' = a$, ale celorlalte laturi ale triunghiului, a cărui construcție devine imediată.

Soluție algebrică. Fie $x > y > z$ laturile triunghiului. Conform enunțului avem sistemul de ecuații

$$x + y + z = 2p \quad ; \quad x - y = m \quad ; \quad y - z = n$$

care rezolvat dă

$$x = \frac{2p + 2m + n}{3} \quad ; \quad y = \frac{2p - m + n}{3} \quad ; \quad z = \frac{2p - m - 2n}{3}.$$

Problema revine la construirea unui triunghiu căruia i se cunosc laturile.

Soluții algebrice analoage de la D-nii: I. A. BARBU (Liceul „Ioniță Asan", Caracal); GH. D. BRAȘOVEANU (Liceul „Traian", T.-Severin); CR. I. CANTUNIAR (Liceul „T. Maiorescu", București); MARIN D. CÂRSTEA (Liceul militar, Timișoara); MIHAI R. CONSTANTINESCU (Liceul Sf. Petru și Pavel, Ploești), ILIE N. CONSTANTINESCU (Liceul „N. Bălcescu", Brăila); M. D. COTARIU (Brăila); CONST. C. DIACONU (Liceul „Aurel Vlaicu", București), P. P. DRĂGHICESCU (Student-inginer, București); CONST. P. GUȚU (Liceul militar, Timișoara); CONST. C. ILIESCU (Colegiul Național, Predeal); MIHAI MANOLIU (Liceul „Codreanu", Bârlad); STELIAN MARINESCU (Liceul Militar, Timișoara); TR. V. MUSTĂCESCU (Liceul „Titu Maiorescu", București); V. D. PĂLĂCEANU, BARBU I. POPESCU, STELIAN M. POPESCU, MIRCEA PRISECARU, I. V. ROGOZ, DAN D. SILIȘTEANU, CONST. I. STAICU (Liceul militar, Timișoara).

Doi rezolvitori, necitați mai sus, au trimis soluțiile cu semnături imposibil de descifrat.

PROBLEMA 5904. *Umoristului* MARK TWAIN *i s'a pus întrebarea: „Dacă unei ghiulele de tun îi trebue* $3\frac{1}{8}$ *secunde pentru a străbate primele 4 mile,* $3\frac{5}{8}$ *pentru celelalte patru mile şi aşa mai departe, cât timp îi va trebui pentru a străbate 1500 milioane de mile ?".*

MARK TWAIN *a răspuns: „Habar n'am !".*

Să se studieze mişcarea ghiulelei.

ALEXANDRU STOENESCU.

Distanţa de 1500 milioane de mile se compune din 375.000.000 intervale a 4 mile intervalul.

Timpul necesar pentru a străbate:

primul interval este de $\left(3+\frac{1}{8}\right)$ secunde

intervalul al doilea „ „ $\left(3+\frac{5}{8}\right)$ „

„ *al treilea* „ „ $\left(3+\frac{9}{8}\right)$ „

.....

intervalul ultim „ $\left[3+\frac{1+(375.000.000-1)\times 4}{8}\right]$ sec.

Timpul în care ghiuleaua străbate distanţa va fi suma tuturor timpurilor parţiale, care este suma unei simple progresii aritmetice. Se găseşte astfel:

$$T = 35.156.251.078.125.000 \text{ secunde.}$$

Având în vedere că o zi cuprinde $24 \times 360 = 86.400$ secunde, iar un an presupus de 365 zile:

$$365 \times 86.400 = 31.536.000 \text{ secunde,}$$

deducem că timpul necesar străbaterii celor 1500 milioane de mile este de:

$$\frac{35.156.251.078.125.000}{31.536.000} \cong 1.114.800.000 \text{ ani}$$

$$\cong 11.148.000 \text{ secole.}$$

Față de un rezultat atât de înfiorător trebue să recunoaștem că începem *a da dreptate* umoristului MARK TWAIN când a răspuns „*Habar n'am*".

In același fel gândește de altfel și D-l ILIE N. CONSTANTINESCU (Brăila), care fără a face niciun calcul ne comunică următoarele:

„Problema e imposibilă căci nicio ghiulea nu poate străbate 1500 milioane de mile, deoarece pentru aceasta ar trebui să aibe un impuls extraordinar și din cauza rotunzimii pământului și a gravității, precum și a rezistenței aerului, ghiuleaua va trebui să cadă mult mai înainte de-a străbate spațiul cerut.

Deci ca concluzie, umoristul MARK TWAIN avea dreptate, când a răspuns „*Habar n'am!*".

Problema poate fi continuată prin calcularea iuțelilor medii în intervale, iuțeli cari scad astfel:

în primul interval $v = \dfrac{4}{3+\dfrac{1}{8}} = 1{,}28$ mile/sec.

în intervalul al doilea $v = \dfrac{4}{3+\dfrac{5}{8}} = 1{,}10$ mile/sec.

în intervalul al treilea $v = \dfrac{4}{3+\dfrac{9}{8}} = 0{,}96$ mile/sec.

în ultimul interval:

$$v = \frac{4}{3+\dfrac{1+4\times 374.999.999}{8}} = \frac{21{,}3}{109} \text{ mile/sec.}$$

La această problemă s'au mai primit câteva soluții bune ce s'au pierdut din cauza războiului și o soluție eronată, pe care o menționăm că ajunge să stabilească cu cifre că MARK TWAIN a avut dreptate.

AL. ȘT.

PROBLEMA 5940. *In patratul* ABCD *de centru* O, *ducem tangenta* BT *din* B *la cercul* $(D, \overline{DO})$; *perpendiculara în* C *pe* AC *taie cercul* $(D, \overline{DB})$ *în* E, *opus lui* D, *față de* BC

Să se demonstreze că dreptele DE, BT, AC *sunt concurente și se taie sub unghiuri de câte* 60^0.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: MIHAI R. CONSTANTINESCU (liceul Sf. Petru și Pavel, Ploești) și MIRCEA I. PĂTRĂȘCIOIU (Buzău).

In triunghiul dreptunghic DBT, cateta $\overline{DT} = \overline{DO}$ este jumătatea ipotenusei $\overline{DB}$; deci

$$\sphericalangle DBT = 30^0.$$

Fie E' proiecția lui E pe DB. In triunghiul dreptunghic DEE', cateta $\overline{EE'} = \overline{CO}$ este jumătatea ipotenusei $\overline{DE} = \overline{DB}$; deci:

$$\sphericalangle BDE = 30^0.$$

Este evident atunci că dreptele AT și DE se taie pe AC sub unghiuri de câte 60^0.

Observații. 1. Enunțul problemei nu este desăvârșit fiindcă nu precizează tangenta BT, dar practic nu se poate face confuzie; plecând dela a doua tangentă BT se găsește o proprietate simetrică.

2. Foarte bune soluții geometrice au dat și D-nii: CONST. C. DIACONU (liceul Aurel Vlaicu, București) și GHEORGHE A. GRIGORE.

3. Soluții analitice au dat D-nii: MIHAI R. CONSTANTINESCU și C. C. ILIESCU.

EXERCIȚII

10. *Să se arate că expresia*

$$E = \Sigma a_1^3 - 3\Sigma a_1 a_2 a_3$$

în care sumele cuprind toate combinațiile posibile între $a_1, a_2, \ldots a_n$, *este divizibilă prin*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

și să se afle câtul. (Generalizarea problemei 11, pag. 45 din Calculul Algebric de TR. LALESCU).

MIRCEA ADAM.

R. Avem succesiv

$$[\Sigma a_1]^3 = \Sigma a_1^3 + 3\Sigma a_1^2 a_2 + 6\Sigma a_1 a_2 a_3 = \Sigma a_1^3 + 3\Sigma a_1 a_2 (a_1 + a_2)$$

$$+ 2\Sigma a_1 a_2 (a_3 + \ldots + a_n) = \Sigma a_1^3 + 3\Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 - 3\Sigma a_1 a_2 a_3.$$

Deci

$$E = [\Sigma a_1]^3 - 3\Sigma a_1 \Sigma a_1 a_2 = \Sigma a_1 [\Sigma a_1^2 - \Sigma a_1 a_2].$$

11. *Care este condiția ca rădăcinile ecuației*

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

să formeze laturile unui patrulater inscriptibil de diagonale p *și* q.

CPT. E. ST. IACOB.

R. Conform relației lui PTOLOMEU, între laturile și diagonalele unui patrulater inscriptibil avem

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = pq. \tag{1}$$

Relațiile între rădăcinile și coeficienții ecuației date sunt

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -p \tag{2}$$

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 x_2 + x_3 x_4 = q \tag{3}$$

$$(x_1 + x_2)\, x_3 x_4 + (x_3 + x_4)\, x_1 x_2 = -2 \tag{4}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = s. \tag{5}$$

Ținând seamă de (1) și (2) relația (3) devine

$$(x_1 + x_2)^2 + p(x_1 + x_2) + q(1 - p) = 0. \tag{6}$$

Din (2) și (6) se scot valorile sumelor $(x_1 + x_2)$ și $(x_3 + x_4)$ care se duc în (4). Ecuația astfel obținută în $x_1 x_2$ și $x_3 x_4$ împreună cu (1) dau valorile acestor produse, care duse în (5) conduc la relația cerută în enunț. Acea relație este complicată și fără interes pentru cazul general.

12. *Fie* φ *punctul lui* FEUERBACH *al triunghiului* ABC *și* A_1, B_1, C_1 *mijloacele laturilor acestui triunghiu. Se notează cu* α, β, γ *triunghiurile, măsurate în același sens, pe care* φA_1, φB_1, φC_1 *le fac cu laturile* BC, CA *și* AB. *Să se demonstreze că dacă* BC > CA > AB, *avem*

$$\frac{\sin(\gamma + B)}{\sin(\beta - C)} + \frac{\sin(\gamma - A)}{\sin(\alpha + C)} = 1.$$

S-LT. M. GRUMĂZESCU.

R. Se știe că

$$\varphi C_1 = \varphi A_1 + \varphi B_1. \tag{1}$$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile $B_1\varphi C_1$, $A_1\varphi C_1$ și găsim

$$\varphi B_1 = \varphi C_1 \frac{\sin B_1 C_1 \varphi}{\sin C_1 B_1 \varphi}, \quad \varphi A_1 = \varphi C_1 \frac{\sin A_1 C_1 \varphi}{\sin C_1 A_1 \varphi}. \tag{2}$$

Apoi pe o figură se vede că

$$\sphericalangle B_1 C_1 \varphi = \pi - (\gamma + B) \; ; \; \sphericalangle C_1 B_1 \varphi = \beta - C \; ; \; \sphericalangle A_1 C_1 \varphi = \gamma - A;$$

$$\sphericalangle C_1 A_1 \varphi = \pi - (\alpha + C).$$

Ducând aceste valori în (2) și apoi trecând la (1) se găsește relația din enunț.

13. *Dacă lungimile proiectantelor centrului de greutate al unui triunghiu pe tangentele în vârfuri la cercul circumscris, sunt în progresie aritmetică, atunci și patratele laturilor triunghiului sunt în progresie aritmetică.*

CONST. PANTELIMON.

R. Fie $CA < AB$ două laturi ale triunghiului, A' mijlocul lui BC, G centrul de greutate, M proiecția lui C pe tangenta în A la cercul ABC și x unghiul A'AB. Avem

$$GM = GA \times \sin GAM.$$

Dar $$\sphericalangle GAM = x + C$$

$$\therefore \quad \sin GAM = \sin C \cos x + \sin x \cos C. \tag{1}$$

Din triunghiul AA'B în care notăm cu m_a mediană AA' scoatem

$$m_a \cos x + \frac{a}{2}\cos B = c \quad \therefore \quad \cos x = \frac{2c - a\cos B}{2m}$$

$$\frac{2\sin x}{a} = \frac{\sin B}{m} \quad \therefore \quad \sin x = \frac{a \sin B}{2m}.$$

Ducem aceste valori în (1) și apoi ținem seama de relațiile

$$c - a\cos B = b\cos A \quad , \quad \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} = \frac{1}{2R}$$

și găsim $$\overline{GM} = \frac{b^2 + c^2}{6R}.$$

La fel

$$\overline{GN} = \frac{c^2 + a^2}{6R} \quad , \quad \overline{CP} = \frac{a^2 + b^2}{6R}$$

de unde rezultă proprietatea din enunț.

14. *Să se arate că oricare ar fi* n *finit, avem*

$$\prod_0^n \left[p + 1 - \frac{p+1}{2} C_p^1 + \frac{p+1}{3} C_p^2 - \ldots + (-1)^k \frac{p+1}{k+1} C_p^k + \ldots + (-1)^p \right] = 1.$$

OCT. E. GHEORGHIU.

R. Plecăm dela identitatea

$$(1 - x)^p = 1 - C_p^1 x + C_p^2 x^2 \ldots + (-1)^p x^p$$

pe care o înmulțim cu dx și apoi integrăm între 0 și 1.

Avem

$$\int_0^1 (1 - x)^p \, dx = \int_0^1 [1 - C_p^1 x + C_p^2 x^2 - \ldots + (-1)^p x^p] \, dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p+1} = 1 - \frac{1}{2} C_p^1 + \frac{1}{3} C_p^2 - \ldots + (-1)^p \frac{1}{p+1}.$$

Înmulțim ambii membri cu $p + 1$, dăm lui p valori dela 0 la n și înmulțind sumele obținute membru cu membru, obținem identitatea din enunț.

15. *Să se demonstreze că suma puterilor a două puncte conjugate în raport cu o sferă este egală cu pătratul distanței lor.*

A. H. CUBAT.

R. Fie (x_1, y_1, z_1) și (x_2, y_2, z_2) coordonatele celor două puncte și

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

ecuația sferei. Punctele fiind conjugate față de sferă avem

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = R^2. \qquad (1)$$

Puterile celor 2 puncte față de sferă sunt

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 \quad \text{și} \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2.$$

Făcând suma lor Σ și ținând seamă de (1) avem

$$\Sigma = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

care este tocmai pătratul distanței dintre punctele considerate.

PROBLEME PROPUSE

6055 *). Prin vârfurile tetraedrului ABCD se duc patru drepte paralele de lungimi date AA', BB', CC, DD. Să se determine direcția acestor paralele așa încât punctele A', B', C', D' să fie în același plan.

V. THÉBAULT.

6065. Să se găsească pătratul simetric de 15 cifre:

$$N^2 = a_1 a_2 \ldots a_7 a_8 a_7 a_6 \ldots a_1.$$

SLT. M. AL. VASILESCU-ȘTABU.

6066. Care este cel mai mic număr de trei cifre, al cărui indicator este un cub perfect?

COMANDOR I. LINTEȘ.

*) Înlocuește problema 6055 din numărul trecut, al cărui enunț este identic cu problema 6045 propusă la pag. 167 din acest volum.

6067. Fie MN un diametru fix al cercului cu centrul în O şi de rază R. Se consideră un punct P mobil pe cerc şi se ia pe OP lungimea OQ de valoare constantă *d*. Dreptele NP, NQ şi MQ, MP se întâlnesc în A şi B.

Să se arate că punctele A şi B se mişcă pe un cerc fix a cărui rază se cere să se calculeze în funcţie de R şi *d*.

G-L GH. BUICLIU.

6068. Să se verifice că:

$$\sum_{s=0}^{k-r}(-1)^{k-r-s}\,C_{i-r}^{s}\,C_{i-r-s-1}^{i-k-1}=1 \qquad (i\geqslant k+1).$$

N. N. MIHĂILEANU.

6069. Să se arate că pentru a calcula determinantul lui VANDERMONDE având ca elemente rădăcinile unei ecuaţii date,

$$f(x)=0,$$

este suficient să se rezolve ecuaţia

$$f'(x)=0.$$

Aplicaţie: *m* şi *n* fiind primi între ei, se consideră ecuaţia

$$f(x)=x^m+p_n x^{m-n}+p_n=0.$$

MIRCEA ADAM.

6070. Să se rezolve un patrulater sferic ABCD, când se cunosc trei laturi $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ şi unghiurile necuprinse între ele A şi D. Discuţie.

M. GHERMĂNESCU.

6071. $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ fiind două puncte raportate la un sistem de axe dreptunghiulare, să se arăte că în transformarea

$$x_1x_2=k^2 \quad , \quad y_1y_2=k^2$$

unui cerc C_i îi corespunde o cuartică Γ_i, cu origina punct dublu; iar cercurilor C_i faţă de care origina axelor de coordonate are aceeaşi putere, le corespund cuartice Γ_i astfel că o dreaptă care trece prin O le taie în perechi de puncte în involuţie.

C. IONESCU-BUJOR.

6072. Tangenta și normala în punctul M la curba (C) taie axele xx', yy' respectiv în S, T și S_1, T_1.

1°. Să se determine curba (C) știind că

$$\frac{s(MSS_1)}{s(MTT_1)} = k^2 \frac{s(OS_1T_1)}{s(OST)},$$

unde $s(MSS_1)$ înseamnă suprafața triunghiului MSS_1, iar k este un număr dat.

2°. Să se arate că pentru aceste curbe, proiecția lui S_1 pe OM descrie o curbă omotetică cu (C).

S-LT. MIRCEA D. POPA.

6073. Un pieton, în timp ce străbate cu iuțeala constantă v o potecă orizontală și rectilinie, învârtește un baston de lungime a cu iuțeala de rotație constantă ω într'un plan vertical paralel cu axa potecii.

O muscă se deplasează pe baston dela vârf spre centrul de rotație al bastonului cu accelerația constantă w. Să se studieze *mișcarea absolută a muștei*. La momentul inițial bastonul este în poziție verticală îndreptat în sus, iar musca se găsește în repaos în vârful său.

Se va presupune că centrul de rotație al bastonului descrie o orizontală.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La pag. 467 vol. XLVII rândul 3 de sus în loc de $(-1)^n N^2$ se pune $(-1)^n 10N^2$.

La pag. 512 vol. XLVII rândul 5 de jos în loc de $M \times B$ se pune $\leqslant M \times B$.

La pag. 566 vol. XLIX rândul 19 de sus în loc de 139 se pune 138.

La pag. 566 vol. XLIX rândul 27 de sus în loc de 241 se pune 240.

La pag. 574 vol. XLIX rândul 5 de sus în loc de 6_n se pune $6p_n$.

La pag. 574 vol. XLIX rândul 6 de sus în loc de $p_r\ p_{r-1}$ se pune $6p_r p_{r-1}$.

La pag. 60 vol. L rândul 1 și 2 de sus în loc de $N > z$ se pune $N > 2$.

La pag. 61 vol. L rândul 13 de jos în loc de $\frac{3}{n^2}$ se pune $\frac{3}{\pi^2}$.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbaiani A. M. (6039, 46); *Barbu A. I.* (5864, 906, 13, 59, 6011, 13, 47, E); *Braşoveanu D. Gh.* (5954, 6052, 53); *Caramalău V. Eugen* (5934, 6015, 39, 43, 46, 47, 49); *Cocea A. Th.* (N, P); *Columbeanu D. Petre* (5971, 6002, 15, 19, 47); *Constantinescu N. Ilie* (5985); *Grigore A. Gh.* (5942, 54, 56, 83, 84, 6011, 15, 21, 24, 46, 47, E); *Ieşan Al.* (6036, 43, 47, 50); *Leon A. M.* (6046); *Mustăcescu V. Tr.* (6015, 36, 39, 43, 47); *Pătrăscioiu M.* (2462, 4404, 5840, 907, 99, 6002, 15, 25); *Piţigoi Gh. Victor* (6036); *Şaichin Adolf* (6036, 39, 40, 43); *Soare D. Mircea* (5926, 28, 40, 69, 6002); *Teodorescu A. Al.* (5981); *Wegener N. E.* (5960).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 500

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . . Lei 600

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 450

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 75

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 350

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 500

XVI. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Partea I, Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 500

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 500

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 200

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 950

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ione cu-Bujor* . . . Lei 600

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 300

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 300

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

C. 28.525.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1945

SUMARUL

1. Asupra distribuţiei numerelor prime . *Tiberiu Popoviciu.*
2. O proprietate funcţională, comună cercului şi spiralei logaritmice . . . . . *M. Ghermănescu.*
3. Concursul „Gazeta Matematică" din 1945. *Delegaţia societăţii.*
4. Note matematice: 19 — 20.
5. Chestiuni de examen.
6. Bibliografie.
7. Probleme rezolvate: 1969, 2947, 3784, 5747.
8. Exerciţii: 16—20.
9. Probleme propuse: 6074 — 6082.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1945

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: Inginer Inspector General **I. I. Chiţulescu**; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **60**06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133.

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 400

ASUPRA DISTRIBUȚIEI NUMERELOR PRIME

1. Sub acest titlu D-l C-DOR I. LINTEȘ publică un articol în *Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine* [1]), în care își propune să demonstreze următoarea proprietate [2]):

II. *Dacă* n *este un număr natural, între* $n(n+1)$ *și* $(n+1)^2$ *există cel puțin un număr prim.*

O serie de greșeli face însă ca demonstrația dată în articolul citat să fie cu totul iluzorie. In cele ce urmează voi arăta punctele principale ale insuficienței acestei demonstrații.

Autorul pleacă dela observația că, dacă $B > A \geqq \sqrt{B}$, numărul numerelor prime cuprinse între A și B este dat de expresia

$$(1) \qquad I_B(N) - I_A(N),$$

unde:

a) N este egal cu produsul numerelor prime $\leqq \sqrt{B}$.

b) $I_A(N)$ este numărul numerelor prime cu N din șirul $1, 2, \ldots, A$ [3]).

Expresia (1) dă numărul numerelor prime p astfel ca $A < p \leqq B$. Intr'adevăr fie, ca de obiceiu, $\pi(x)$ numărul numerelor prime $\leqq x$, atunci formula clasică a lui LEGENDRE

$$\pi(B) - \pi(\sqrt{B}) + 1 = I_B(N)$$

precum și formula, ușor de stabilit,

$$\pi(A) - \pi(\sqrt{B}) + 1 = I_A(N) \quad , \quad B > A \geqq \sqrt{B},$$

ne arată că expresia (1) este egală cu

$$\pi(B) - \pi(A).$$

Bine înțeles că dacă presupunem că B nu este prim, expresia (1) dă numărul numerelor prime p astfel ca $A < p < B$.

---

1) « *Sur la distribution des nombres premiers* », Bull. Sec. Sci. Acad. Roumaine, XXVI, 83—88, 1943. O versiune prescurtată (cu multe și regretabile omisiuni în text) a fost publicată de autor și în „G. M.": « *Asupra distribuției numerelor prime* », „G. M.", L, pag. 113.

2) Numerotația teoremelor am păstrat-o din articolul autorului. Am păstrat de asemenea, pe cât posibil, notațiile autorului.

3) Mai general $I_A(N)$ este egal cu numărul numerelor prime cu N (număr natural) și $\leqq A$. Valoarea funcției $I_A(N)$ este dată de formula

$$I_A(N) = [A] - \Sigma\left[\frac{A}{p}\right] + \Sigma\left[\frac{A}{pq}\right] - \Sigma\left[\frac{A}{pqr}\right] + \ldots$$

$p, q, r, \ldots$ fiind factorii primi diferiți ai lui N.

2. D-l C-DOR I. LINTEŞ pare a afirma că pentru a demonstra teorema II este destul a căuta să se realizeze egalitatea

$$(2) \qquad I_B(N) - I_A(N) = 1.$$

In realitate trebuia satisfăcută inegalitatea

$$(2') \qquad I_B(N) - I_A(N) \geqq 1.$$

Autorul stabileşte apoi inegalitatea

$$(3) \qquad I_B(N) - I_A(N) \leqq I_{B-A}(N)$$

şi printr'un raţionament, de altfel foarte obscur, pare a deduce că (2) (mai exact (2')) este verificat dacă se ia

$$B - A = (\sqrt{B}) = \text{cel mai mare număr prim} \leqq \sqrt{B}.$$

E de observat că în niciun caz *numai din* (3) *nu poate rezulta* (2) *sau* (2').

3. O altă greşală este deducerea egalităţii (3). Pentru a ajunge aici afirmă că avem

$$(4) \qquad I_{A+x}(N) = I_A(N) + I_x(N) - \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, \text{ dacă N este prim cu A şi } x, \\ 0, \text{ dacă N este neprim cu A sau } x. \end{cases}$$

Demonstraţia dată formulei (4) de D-l C-DOR I. LINTEŞ [1] *este greşită*. Mai mult chiar, *formula* (4) *nu este adevărată*. Pentru a vedea acest lucru e destul să presupunem $A = x$. Ar trebui atunci, după D-l C-DOR I. LINTEŞ, să avem

$$F(A, N) = 2I_A(N) - I_{2A}(N) = 0 \text{ sau } 1.$$

Fie m un număr natural şi

$$p_1 (= 2), p_2, p_3, \ldots$$

numerele prime în ordinea lor crescătoare. Fie apoi p_r cel mai mare număr prim astfel ca $p_r < 2^{m+1}$. Avem

$$2^m < p_r < 2^{m+1},$$

deoarece între 2^m şi 2^{m+1} există cel puţin un număr prim.

Să luăm acum

$$N = p_2 p_3 \ldots p_r .$$

1) C-DOR I. LINTEŞ, « *Cercetări in legătură cu indicatorii* », „G. M.", XLVII, 117.

Avem

$$(5) \qquad I_{2^m}(N) = m + 1 \quad , \quad I_{2^{m+1}}(N) = m + 2,$$

deci

$$(6) \qquad F(2^m, N) = m.$$

Avem de asemenea

$$(7) \quad I_{N-2^m}(N) = \varphi(N) - m, \quad I_{2N-2^{m+1}}(N) = 2\varphi(N) - (m+1),$$

deci

$$(8) \qquad F(N - 2^m, N) = -m + 1.$$

Relaţiile (5) şi (7) sunt imediate dacă observăm că numerele prime cu N şi mai mici decât N sunt, în ordinea lor crescătoare

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^{m+1}, \ldots, N - 2^{m+1}, N - 2^m, \ldots, N - 2, N - 1.$$

Formulele (6) şi (8) ne arată că *funcţia numerică* F(A, N) *ia efectiv orice valoare întreagă pozitivă, nulă sau negativă.*

Se mai poate observa că, pentru un N dat, funcţia F(A, N) nu ia decât un număr finit de valori. Intr'adevăr dacă m este un număr natural, avem

$$I_{A+mN}(N) = I_A(N) + m\varphi(N).$$

Rezultă că vom avea şi

$$F(A + mN, N) = F(A, N),$$

de unde se deduce proprietatea enunţată. Ca de obiceiu, $\varphi(N)$ însemnează indicatorul lui N [1]).

4) Raţionamentele autorului articolului citat la început sunt adesea neclare. Ţin să mai relev că autorul comite şi unele inadvertente de calcul elementar. De ex., dacă luăm

$$(\sqrt{B}) = n + 1 \quad , \quad A = B - (\sqrt{B})$$

autorul pare a conchide că

$$A = n(n + 1) \quad , \quad B = (n + 1)^2.$$

Se poate vedea uşor, pe un exemplu, că acest lucru este inexact. Fie B = 30. Atunci $(\sqrt{B}) = 5$, deci $n = 4$. Aşa dar

$$A = B - (\sqrt{B}) = 25 \neq n(n + 1) = 20,$$

$$B = 30 \neq (n + 1)^2 = 25.$$

1) Dacă D-l C-DOR I. LINTEŞ ar fi reuşit să demonstreze *direct*, pentru valorile lui A şi B ($x = B - A$) care îl interesează, că ε din formula (4) este $\leqslant 0$, ar fi putut deduce teorema II.

5. O altă teoremă enunțată de D-l C-DOR I. LINTEȘ este:

III. *Între* n *și* 1,618...n *există cel puțin un număr prim.*

Demonstrația sufere de vicii analoage cu acelea semnalate la demonstrația teoremei II. Afară de aceasta noțiunea „A très près de B" a autorului nu este de loc precizată și, în consecință, mai cu seamă în ce privește utilizarea ei, ea este ininteligibilă.

De altfel în teoria numerelor e cunoscută următoarea teoremă mai precisă:

Dacă $\varepsilon > 0$, *între* n *și* $(1+\varepsilon)$ n *există cel puțin un număr prim, din moment ce* n *este destul de mare.*

6. Teorema următoare a D-lui C-DOR I. LINTEȘ este

IV. *In intervalul* (A, B) *există mai puține numere prime decât în intervalul* (kA, kB), *dacă* $k > 1$.

Voiu arăta că *teorema nu este adevărată.* Pentru aceasta e destul să luăm exemplele

$$A = 100, \quad B = 104, \quad k = 2$$
$$A = 178, \quad B = 182, \quad k = 2, 3$$
$$A = 546, \quad B = 548, \quad k = 2, 3, 4.$$

Se poate chiar arăta că există intervale (A, B), *cu* A, B *oricât de mari* și cari conțin *mai multe* numere prime decât intervalul (2A, 2B). Intr'adevăr, după teorema lui DIRICHLET, există o infinitate de numere prime de forma $15m + 13$ (m par $\geqq 0$). Fie atunci p un astfel de număr prim și să luăm $A = p - 1$, $B = p + 1$. Intervalul (A, B) conține un număr prim. Singurele numere impare din intervalul (2A, 2B) sunt

$$2p - 1 = 30m + 25 = 5(6m + 5),$$
$$2p + 1 = 30m + 27 = 3(10m + 9),$$

cari sunt ambele compuse. Intervalul (2A, 2B) conține deci 0 numere prime. Se poate arăta, mai general, că pentru orice k natural există o infinitate de numere prime p astfel ca intervalul $(kp - k, kp + k)$ să nu conțină niciun număr prim [1]).

1) Cititorul va putea rezolva problema pe care o voi propune în „G. M". relativ la această chestiune.

Enunț aici următoarea proprietate mai generală:

Fiind date două numere naturale k *și* m, *există o infinitate de perechi de numere naturale* A, B *astfel ca:*

a) B — A *să aibă aceeași valoare constantă.*

Demonstrația teoremei V a D-lui C-DOR I. LINTEȘ conține greșeli de felul celor semnalate mai sus.

7. Din teoremele precedente, autorul trage câteva consecințe. Dintre acestea unele sunt fără interes deoarece se cunosc delimitări ale lui $\pi(x)$ mult mai precise. De altfel toate aceste consecințe sunt fără valoare deoarece ele sunt deduse din teoreme defectuos demonstrate. Amintesc numai următoarea consecință:

IX. *Intre patratele a două numere naturale consecutive există cel puțin un număr prim.*

8. Pentru a termina țin să spun că teorema IX a fost de mult enunțată în teoria numerelor dar *nu a putut fi demonstrată până azi*, cu toate sforțările mai multor matematicieni de seamă și cu mijloacele de cari dispun matematicele moderne. Cu toate acestea e *foarte probabil* că nu numai teorema IX dar chiar și teorema II sunt adevărate.

Se știe că funcția $I_A(N)$ este utilă în studiul distribuției numerelor prime. Cu ajutorul acestei funcții se demonstrează spre exemplu, destul de ușor, că avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

Funcția $I_A(N)$ apare în mod natural când se studiază binecunoscutul *ciur* al lui ERATOSTHENE. Cercetările moderne asupra acestui ciur, inaugurate cu mult succes de VIGGO BRUN, au permis acestui din urmă autor demonstrarea, printre altele, a următoarei proprietăți:

Dacă x *este destul de mare, între* x *și* $x+\sqrt{x}$ *există cel puțin un număr întreg având cel mult 11 factori primi diferiți.*

Recent s'a putut reduce acest număr 11 la 4.

E evident că proprietatea precedentă e în strânsă legătură cu teorema II și deci cu teorema IX, care este o consecință a acestei din urmă.

TIBERIU POPOVICIU.

---

b) *Intervalul* (A, B) *să conțină* m *numere prime.*

c) *Intervalul* (*k*A, *k*B) *să nu conțină niciun număr prim.*

Proprietatea aceasta este *foarte probabil* adevărată. Nu este exclus ca să fie adevărată chiar o proprietate încă mai generală în care, de ex., condiția *c)* ar fi înlocuită cu următoarea

c') *Intervalul* (*k*A, *k*B) *să conțină un număr dat* n *de numere prime.*

O PROPRIETATE FUNCȚIONALĂ, COMUNĂ CERCULUI ȘI SPIRALEI LOGARITMICE

D-l Profesor N. ABRAMESCU a studiat în articolul „Asupra spiralei logaritmice", din G. M., Vol. XXIX, p. 321, următoarea problemă:

Să se determine curbele plane C, *reprezentate în coordonate polare prin ecuația* $\rho = f(\theta)$, *așa încât*, M_0, M_1, M_2 *fiind punctele de pe curbă corespunzătoare valorilor* a, a + h, a + 2h, ... *date lui* θ, *triunghiurile rectilinii* $M_0M_1M_2$, $M_1M_2M_3$, ... *să fie asemenea, oricare ar fi* a *și* h.

D-l N. ABRAMESCU găsește că spiralele logaritmice, $\rho = Ae^{a\theta}$ răspund problemei, cu condiția implicită ca curbele să aibă o tangentă bine determinată în orice punct, adică $f(\theta)$ să admită o derivată de primul ordin.

Reluând problema, regretatul profesor A. ANGELESCU a arătat în articolul cu titlul de mai sus, din G. M., XXIX, p. 364, că și cercurile ce trec prin pol

$$\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$$

se bucură de aceeași proprietate, în ipoteza că funcția $f(\theta)$ admite derivate de primele trei ordine.

In cele ce urmează, voiu regăsi rezultatele lui A. ANGELESCU într'o ipoteză cu totul generală, aceea a existenței funcției neidentic nule $f(\theta)$ sau, dacă se crea totuși un caz concret, în ipoteza că funcția $f(\theta)$ este *măsurabilă.*

In adevăr, A. ANGELESCU arată că problema geometrică duce la următorul sistem de ecuații *funcționale*:

$$(1)\quad \begin{aligned} &f^2(x+2h)-f(x+h)f(x+3h)=f^2(x+h)-f(x)f(x+2h),\\ &f(x)f(x+3h)-f(x+h)f(x+2h)=2[f(x)f(x+2h)\\ &\quad -f^2(x+h)]\cos h, \end{aligned}$$

cari trebue să fie satisfăcute oricare ar fi x și h.

1. Pentru a determina soluția generală măsurabilă a acestui sistem de ecuații, am nevoie de următoarele două proprietăți preliminarii:

I. *Soluția generală măsurabilă a ecuației funcționale*

$$(2)\qquad f(x+h)=f(x)$$

este o funcție măsurabilă arbitrară de h.

In adevăr, ecuația de mai sus se mai poate scrie

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

care arată că $f(x)$ are o derivată mereu nulă, deci se reduce la o constantă față de x, care poate fi însă o funcție măsurabilă arbitrară de h, $\varphi(h)$.

II. *Soluția generală măsurabilă a ecuației funcționale*

$$f(x+h)=\varphi(h)f(x) \tag{3}$$

este $f(x)=Ae^{ax}$, $\varphi(h)=e^{ah}$, *unde* A *și* a *sunt constante arbitrare.*

Căci ecuația funcțională (3) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{f(x+h)}{[\varphi(h)]^{\frac{x+h}{h}}}=\frac{f(x)}{[\varphi(h)]^{\frac{x}{h}}},$$

ecuație de tipul (2) în raport cu membrul al doilea, luat ca funcție necunoscută. Vom avea deci, în baza propoziției precedente I,

$$f(x)=A(h)[\varphi(h)]^{\frac{x}{h}}, \tag{4}$$

unde $A(h)$ și $\varphi(h)$ sunt funcții măsurabile arbitrare.

Dar $f(x)$ nu depinde h deci, în primul rând, $[\varphi(h)]^{\frac{1}{h}}$ trebue să se reducă la o constantă b,

$$[\varphi(h)]^{\frac{1}{h}}=b \quad , \quad \varphi(h)=b^h \quad , \quad f(x)=A(h)\,b^x,$$

care arată că și $A(h)$ trebue să se reducă la o constantă A. Punând $b=e^a$, regăsim expresiile din enunț.

2. Odată aceste propoziții stabilite, observăm că prima ecuație funcțională din sistemul (1) se mai poate scrie

$$f(x+2h)[f(x+2h)+f(x)]=f(x+h)[f(x+h)+f(x+3h)]$$

sau încă

$$\frac{f(x+h)+f(x+3h)}{f(x+2h)}=\frac{f(x)+f(x+2h)}{f(x+h)},$$

ecuație de tipul (2) în raport cu membrul al doilea, luat ca funcție necunoscută, care deci se reduce la o funcție măsurabilă arbitrară de h, $\varphi(h)$,

$$f(x+2h)+f(x)=\varphi(h)f(x+h). \tag{5}$$

De asemeni, a doua ecuație a sistemului (1) se mai poate scrie

$$f(x)\,[f(x+3h) - 2f(x+2h)\cos h] = f(x+h)\,[f(x+2h) - 2f(x+h)\cos h]$$

sau încă

$$\frac{f(x+3h) - 2f(x+2h)\cos h}{f(x+h)} = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h)\cos h}{f(x)},$$

ecuație de asemeni de tipul (2) în raport cu membrul al doilea, luat ca funcție necunoscută, care este deci și el egal cu o funcție măsurabilă arbitrară de h, $\psi(h)$,

$$(6) \qquad f(x+2h) - 2f(x+h)\cos h = \psi(h)\,f(x).$$

Rămâne să determinăm funcția măsurabilă cea mai generală $f(x)$, care satisface ecuațiilor funcționale (5) și (6), împreună cu funcțiile $\varphi(h)$ și $\psi(h)$.

Pentru aceasta, scădem aceste ecuații funcționale, membru cu membru; obținem

$$2f(x+h)\cos h + f(x) = \varphi(h)\,f(x+h) - \psi(h)\,f(x),$$

care se mai poate scrie

$$f(x+h) = \frac{1+\psi(h)}{\varphi(h) - 2\cos h} f(x),$$

ecuație de tipul (3), care admite soluția generală măsurabilă

$$(7) \qquad f(x) = Ae^{ax} \quad , \quad 1 + \psi(h) = e^{ah}\,[\varphi(h) - 2\cos h].$$

Inlocuind, în (5) și (6), $f(x)$ prin această expresie, găsim

$$(8) \qquad \varphi(h) = e^{ah} + e^{-ah} \quad , \quad \psi(h) = e^{2ah} - 2e^{ah}\cos h,$$

care verifică și a doua relație (7). Expresia funcției $\varphi(h)$ arată că ecuația funcțională (5) este satisfăcută și de $f(x) = Be^{-ax}$, unde B este o constantă arbitrară și deci și de

$$f(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax} \quad , \quad \varphi(h) = e^{ah} + e^{-ah}.$$

Această expresie nu satisface și ecuația funcțională (6) decât dacă

$$B\,(e^{ah} + e^{-ah}) = 2B\cos h,$$

care cere $B = 0$ sau

$$e^{ah} + e^{-ah} = 2\cos h,$$

care cere $a = i$.

Curbele căutate sunt deci

$$\rho = Ae^{a\theta} \quad , \quad \rho = A\cos\theta + B\sin\theta,$$

regăsind astfel rezultatul lui A. ANGELESCU.

3. Puteam proceda şi altfel, folosind un anumit rezultat. In adevăr, soluţia generală măsurabilă a ecuaţiei funcţionale (5) este cunoscută: ea a fost dată de D-l ST. KACZMARCZ [1]) şi este

$$f(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax} \quad , \quad \varphi(h) = e^{ah} + e^{-ah},$$
$$f(x) = A\cos ax + B\sin ax \quad , \quad \varphi(h) = 2\cos ah,$$
$$f(x) = Ax + B \quad , \quad \varphi(h) = 2,$$

unde A, B şi a sunt arbitrare.

Nu rămâne atunci decât să vedem care din aceste soluţii satisfac şi ecuaţia funcţională (6). Regăsim astfel rezultatul anterior.

4. Propoziţiile I şi II sunt elementare şi poate cunoscute, deşi nu le-am găsit până acum enunţate undeva. Ele sunt însă primele verigi ale unui lanţ întreg de propoziţii ce urmează a fi publicate într'o lucrare de alte proporţii. Aci am vrut numai să semnalez o aplicaţie remarcabilă a lor, tratată deja în *Gazetă*.

M. GHERMĂNESCU.

CONCURSUL „GAZETA MATEMATICĂ“ DIN 1945

După cum s'a anunţat la pag. 127 din acest volum, anul acesta se va ţine tradiţionalul concurs al revistei *Gazeta Matematică*.

Au fost admişi a lua parte la concurs 35 candidaţi şi anume:

Clasa a IV-a: *Biluseac G. Claudiu.*

Clasa a V-a: *Diaconu Gh. Vasile, Munteanu T. Ioan şi Roşu V. Constantin.*

Clasa a VI-a: *Badea I. Mihai, Constantin N. Vladimir, Doneaud E. André, Dumitrescu Sorin, Haret Sp. Radu, Orha Ion, Panait Ionel, Progreseanu A. Alexandru, Rădulescu E. Dan şi Seni A. Dinu.*

Clasa a VII-a: *Braşoveanu D. Gheorghe, Constantinescu R. Mihai, Leon A. Mihai, Popovici Horaţiu, Sălcuţeanu Gheorghe, Teodorescu Al. Alexandru, Tripşa Iosif şi Vrânceanu Gh. Gheorghe.*

1) ST. KACZMARCZ, *Fundamenta Mathematicae*, t. VI, 1924, p. 122—129.

Clasa a VIII-a: *Barbu A. Ioan, Cantuniar I. Cristu, Cârstea D. Marin, Columbeanu D. Petre, Goldiș I. Gheorghe, Grigore A. Gheorghe, Ieșan Alexandru, Leția L. Valentin, Marinescu C. Marinel, Mustăcescu V. Traian, Pavica Victor, Pițigoi Gh. Victor și Popescu I. Barbu.*

Fiecare candidat va da câte o lucrare scrisă din ambele materii la care s'a înscris.

Lucrările scrise sunt eliminatorii.

Prima lucrare scrisă se va da Joi 10 Mai 1945 dela ora 8^{30} până la ora 11^{30}, iar a doua lucrare scrisă în aceeași zi dela ora 15 la ora 18 la *Politechnică, Calea Griviței 132, București.*

Oralul va începe Vineri 11 Mai 1945 tot la *Politechnică.*

Candidaților cari nu dispun de mijloace pentru venirea la București li se vor trimite din timp mijloacele necesare de transport dacă vom dispune de ele.

Eventualele schimbări vor fi comunicate la timp.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII.

NOTE MATEMATICE

19. *Numărul terminațiunilor distincte ale cuburilor perfecte.* Se cunosc [1]) *teoremele:*

a) *Terminațiunea de* p *cifre a unui cub derivă numai din cubul terminațiunii de* p *cifre a numărului corespunzător acelui cub.*

Consecință. O grupă de p cifre e terminațiune de cub perfect, dacă se întâlnește cel puțin odată, în șirul consecutiv al cuburilor perfecte, până la cubul numărului $N = 10^p - 1$.

b) Dacă a_p și b_p, numere întregi de p cifre, unul complementul aritmetic al celuilalt față de 10^p, au cubul terminat respectiv cu A_p și B_p, de p cifre, atunci A_p și B_p vor fi tot complemente aritmetice față de 10^p.

Urmează că numerele de forma

$$N = \text{Mult. } 10^p + a_p \quad \text{și} \quad M = \text{Mult. } 10^p + b_p = \text{Mult. } 10^p + 10^p - a_p$$

1) I. V. MĂTIEȘ: Terminațiunile cuburilor perfecte și ale rădăcinilor lor. „G. M." Vol. XLI, pag. 332.

putându-se scrie sub forma Mult. $10^p \pm a_p$ vor avea cubul de forma

$$(n \,.\, 10^p \pm a_p)^3 = \text{Mult. } 10^p \pm A_p$$

semnele corespunzându-se.

Aplicând aceste teoreme se pot găsi toate terminaţiunile distincte de 1, 2, 3, 4, ..., p, ... cifre ale cuburilor perfecte.

1. Grupele finale de 1, 2, 3 cifre ale cuburilor perfecte N^3 precum şi forma generală a numerelor N, au fost date în „G. M." Vol. XLI, pag. 332. Numărând aceste terminaţiuni găsim:

Cuburile perfecte au la unităţi orice cifră, deci *10 terminaţiuni cubice distincte de o cifră*. Găsim *63 grupe distincte de două cifre* la cele $10^2 - 1 = 99$ cuburi consecutive şi *505 terminaţiuni cubice distincte de trei cifre*.

2. *Terminaţiunile cubice de patru cifre* se deduc, luând ca bază de plecare, terminaţiunile de trei cifre.

Urmărind tabloul dela pag. 336 loc citat, distingem patru categorii de forme pentru N şi terminaţiunile lui cubice *szu* şi anume:

a) $szu = 000$, $N = 10n$. Ridicăm la cub şi căutăm cifra m, punând condiţia ca N^3 să se termine cu $m000$, avem:

$$N^3 = 1000n^3 = m000 + M \,.\, 10^4 \quad \therefore \quad n^3 = m + M \,.\, 10.$$

Punând $n = 10n_1, \pm\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, obţinem

$$\pm\alpha^3 = m + M \,.\, 10 \quad \therefore \quad m = 0; \pm 1; \pm 8; \pm 7; \pm 4; 5$$

$$\therefore \quad m = 0; \pm 1; \mp 2; \mp 3; \pm 4; 5.$$

Deci grupa $szu = 000$ precedată de orice cifră este terminaţiune cubică de patru cifre.

b) *szu* e o grupă fără soţ, $u \neq 5$, avem

$$N = 1000n \pm abc \quad , \quad N^3 \text{ terminat cu } \pm szu.$$

Ridicăm la cub şi punem condiţia ca N^3 să se termine cu $\pm mszu$, avem:

$$N^3 = \pm (abc)^3 + 3\,(abc)^2 \,.\, 1000n + M \,.\, 10^4 = \pm mszu + M \,.\, 10^4$$

$$\therefore \quad \pm m'szu + 3\,(c)^2 \,.\, 1000n = \pm mszu + M \,.\, 10^4.$$

Cum însă $c = 1, 3, 7, 9 \quad \therefore \quad c^2 = \pm 1 + M.10$, avem:

$$\pm 3n = \pm (m - m') + M \,.\, 10$$

semnele se iau în toate modurile, se obţine

$$\pm n = \pm 7\,(m - m') + M\ 10.$$

Se vede că n e întreg, iar m poate lua una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sau 9.

Deci grupa szu ($u = 1, 3, 7, 9$) *fiind terminațiune cubică, precedată de orice cifră va fi terminațiune cubică de patru cifre.*

c) Grupele finale $sz5$ ale cuburilor perfecte provin dela cubul numerelor

$$N_1 = 40n \pm 5 \quad , \quad N_1^3 \text{ terminat cu } \pm 125$$
$$N_2 = 40n \mp 15 \quad , \quad N_2^3 \text{ terminat cu } \pm 375.$$

Ridicându-le la cub și punând condiția să se termine cu $msz5$, avem:

$$N_1^3 = \pm 125 + 3 \times 25 \times (40n) \pm 3 \times 5 \times (1600n^2) + 4000n^3 + M \cdot 10^4$$
$$\therefore \quad 3n \pm 4n^2 + 4n^3 = m + M \cdot 10.$$

Punem $n = 10n' \pm \alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, obținem:

$$\pm (3\alpha + 4\alpha^3) \pm 4\alpha^2 = m + M \cdot 10$$

și găsim succesiv:

$\alpha = 0 \quad \therefore \quad m = 0$

$\alpha = 1 \quad \therefore \quad \pm 7 \pm 4 = m + M \cdot 10 \quad \therefore \quad m = \pm 1; \pm 3$

$\alpha = 2 \quad \therefore \quad \pm 8 \pm 6 = m + M \cdot 10 \quad \therefore \quad m = \pm 2; \pm 4$

$\alpha = 3 \quad \therefore \quad \pm 7 \pm 6 = m + M \cdot 10 \quad \therefore \quad m = \pm 1; \pm 3$

$\alpha = 4 \quad \therefore \quad \pm 8 \pm 4 = m + M \cdot 10 \quad \therefore \quad m = \pm 2; \pm 4$

$\alpha = 5 \quad \therefore \quad \pm 5 + 0 = m + M \cdot 10 \quad \therefore \quad m = 5.$

Deci cifra miilor din terminațiunea cubică de patru cifre $m \cdot 1000 \pm 125$ *poate lua oricare din valorile* 0, 1, 2, ..., 9.

Concluzie analoagă se obține pentru terminațiunea ± 375.

d) szu, u cifră cu soț (2, 4, 6, 8) avem

$N = 250u \pm abc$, N^3 terminat cu $\pm szu$ care se mai scrie

$$N_1 = 500u_1 \pm abc \quad ; \quad N_2 = 500u_2 \pm (250 + abc).$$

Le ridicăm la cub și obținem succesiv

$$N_1^3 = \pm (abc)^3 + 3\,(abc)^2 \cdot 500u_1 + M \cdot 10^4$$
$$\therefore \quad \pm m'szu + 3c^2 \cdot 500u_1 = \pm mszu + M \cdot 10^4$$
$$\therefore \quad 6000u_1 = \pm (m - m') \cdot 10^3 + M \cdot 10^4 \quad , \quad (c^2 = \pm 4 + M \cdot 10)$$
$$\therefore \quad 3u_1 = \pm \frac{m - m'}{2} + M \cdot 5 \quad ; \quad u_1 = \pm 7 \frac{m - m'}{2} + M \cdot 5.$$

Deci N^3 se termină cu $\pm mszu$, m fiind de paritatea lui m'.

Ridicăm şi pe N_2 la cub şi obţinem

$$\therefore \quad N_2^3 = \pm (250 + abc)^3 + 3(250 + abc)^2 . 500 n_2 + M . 10^4$$

$$N_2^3 = \pm [m' szu + 5000 + 1000 (5A + 3A^2)] + 3c^2 . 500 u_2 + M . 10^4$$

unde $A = \frac{abc}{2}$ (c este cu soţ). Punem condiţia ca N^3 să se termine cu $\pm$ *mszu*, avem:

$$\pm 3u_2 = \pm \left(\frac{m - m' - 5}{2}\right) \mp \frac{A (3A + 5)}{2} + M . 5$$

$$u_2 = \pm 7 \times \left(\frac{m - m' - 5}{2}\right) \mp 7 \frac{A (3A + 5)}{2} + M . 5$$

Deci u_2 este întreg dacă m este de paritate contrară cu m', căci $A (3A + 5)$ este totdeauna cu soţ.

Apropiind concluziile referitoare la m din u_1 şi u_2, vedem că m ia orice cifră în cele două cazuri (în primul caz cifre cu soţ şi în al doilea caz fără soţ sau invers).

Deci punând la dreapta grupei cubice $\pm$ szu (u cu soţ), orice cifră, obţinem terminaţiuni cubice de patru cifre.

Concluziile dela *a), b), c)* şi *d)* se rezumă în:

Toate grupele de trei cifre, care termină un cub perfect, precedate de orice cifră, sunt terminaţiuni cubice de patru cifre[1]).

Rezultă că numărul grupelor de patru cifre, terminaţiuni cubice sunt de zece ori numărul terminaţiunilor cubice de trei cifre, deci există în total 5050 *grupe distincte de patru cifre mszu* ca terminaţiuni cubice.

Se vede că dacă cunoaştem terminaţiunea finală de p cifre a unui cub şi forma generală a rădăcinii lui, se pot afla terminaţiunile de $(p + 1)$ cifre dela finele cubului.

I. V. MĂTIEŞ.

20. *Reconstituirea unei soluţii.* In rândurile retrospective dela sfârşitul soluţiei problemei 1591, publicată la pag. 188, Vol. L din „*Gazeta Matematică*“, sunt trecut cu două trimiteri de manuscrise: una din 1911 şi alta din 1912. Mi-aduc aminte, ultima se referea la o generalizare.

1) Acesta este obiectul problemei 3933, propusă la pag. 39, Vol. XXXVI şi nepublicată încă.

Această problemă a fost propusă de inginerul M. RADU în numărul din Septembrie 1910, pe când intram tocmai în clasa a V-a a liceului „Gh. Lazăr". Așa dar am găsit-o oarecum în pragul carierii mele de corespondent al Gazetei. Știu că mi-a rezistat multă vreme și că abia după ce am învățat teoria figurilor direct asemenea am putut s'o generalizez.

O memorie capricioasă îmi permite să reconstitui aproape cuvânt, cu cuvânt soluția și generalizarea din 1912. Iată mai întâi enunțul modificat[1]):

Pe două drepte fixe OX *și* OY *se dau două perechi de puncte, de asemenea fixe,* A, C_0 *și* B, D_0 *și două puncte mobile* C *și* D *așa încât*

(1) $$\overline{AC} : \overline{AC_0} = \overline{BD} : \overline{BD_0}.$$

Dacă P *e un punct fix din plan, se duc prin* D *două drepte care taie dreapta* PC *respectiv în* M *și* N *după unghiurile* $\sphericalangle$ PMD *și* $\sphericalangle$ PND, *așa încât să avem, modulo* π, *în semn și valoare :*

(2) $\sphericalangle$ PMD $\equiv \sphericalangle$ AOB, (3) $\sphericalangle$ PND $\equiv \sphericalangle$ BOA, (mod. π).

Să se găsească locurile lui M *și* N.

Perechile de puncte omoloage (A, B) și (C_0, D_0) definesc o asemănare directă Σ de pol Ω. Se știe, că Ω e chiar punctul lui MIQUEL al patrulaterului ABD_0C_0. Conform lui (1) punctele C și D se corespund în Σ. Deci, conform lui (2), dreapta PC are ca omoloagă în Σ dreapta MD. Conchidem, că MD trece printr'un punct fix: *omologul* Q *al lui* P *în* Σ. Prin urmare M este locul punctelor pentru care unghiul PMQ rămâne direct egal lui însuși și anume direct egal cu $\sphericalangle$ PΩQ $\equiv \sphericalangle$ AOB, (mod. π). Așa dar locul lui M este cercul PΩQ.

In virtutea lui (2) și (3) triunghiul MDN e isoscel în D. Avem anume :

$$\sphericalangle MDN \equiv \sphericalangle - 2\ AOB, \qquad (\text{mod. } \pi).$$

Insă unghiul QDN e același cu MDN, modulo π, deci constant. Observăm că vârful lui D se mișcă pe dreapta fixă OY iar prima latură trece prin punctul fix Q. In aceste condiții se știe, că a doua latură DN înfășoară o parabolă de focar Q tangentă într'un anume punct al dreptei OY.

1) Problema 1591 corespunde cazului special A=O, P=B, $AC_0 = BD_0$.

Deci locul lui N apare ca podara [1]) sub unghiul constant $\sphericalangle PND \equiv \sphericalangle BOA$ a punctului P față de această parabolă Π.

Fără această observație și numai cu mijloace geometrice, determinarea locului lui N se face astfel. Considerăm un cerc Γ cu centrul în P. Fie S polul tangentei ND a lui Π față de Γ. Locul lui S este așa dar o conică ce trece prin P și care devine cerc când P se confundă cu focarul Q al parabolei, cu alte cuvinte când $P = \Omega$. Considerăm proiecția ortogonală R a lui P, pe tangenta ND. E clar, că R și S sunt puncte omoloage în inversiunea de cerc fundamental Γ. O conică ce trece prin polul P, al inversiunii se transformă în general, într'o cubică circulară cu un punct dublu în P sau într'o dreaptă, în cazul când conica e un cerc.

Dar triunghiul dreptunghic PRN rămâne, în virtutea lui (3) direct asemenea lui însuși. Așa dar între R și N avem o asemănare directă de pol P. Conchidem, că locul lui N este o cubică circulară cu un nod în P sau o dreaptă, în cazul particular $P = \Omega$.

D. B.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREȘTI

Facultățile: Construcții, Electro-mecanică, Mine și Metalurgie

Concursul de admitere. Noembrie 1944. Lucrări scrise.

Geometria Analitică. Se dă dreapta

$$3x + 4y = 12$$

și punctul C (7,4). Se construește triunghiul dreptunghic isoscel ECD cu unghiul drept în C și a cărui ipotenuză e așezată pe dreapta dată.

1°. Să se calculeze coordonatele vârfurilor E și D ale triunghiului, precum și ale proiecției F a lui D pe axa Oy, D fiind vârful cu ordonata negativă.

2°. Să se arate că FC este bisectoarea unghiului EFD.

3°. Să se arate că punctele E, C, D, F se află pe același cerc și să se scrie ecuația acestui cerc.

4°. Cercul taie axa Ox în punctele E' și D' (abscisa lui D' fiind pozitivă). Să se arate că dreptele EE' și DD' sunt egale și paralele și că unghiurile ECE' și DCD' sunt egale.

5°. Să se arate că CE' este îndoitul lui CD'.

6°. Să se explice geometric rezultatele dela punctele 2°, 3° și 4°.

1) Vezi soluția D. ADRIAN GHEORGHIU dela pag. 188 din acest volum. In soluția mea din 1912 nu făceam această observație, ci continuam determinarea locului lui N cu ajutorul polarității reciproce și al inversiunii, așa precum se vede mai sus.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXIV. Nr. 11. Ianuarie 1945. D. V. IONESCU: Asupra unei teoreme a D-lui V. THÉBAULT, G. IUGA: Teoreme din geometria analitică. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

Le général V. NEGREI: *Le dernier théorème de* FERMAT [1]) (Loisirs d'un artilleur), Bucarest, 1944.

Sub titlul şi cu subtitlul de mai sus, D-l G-l în rezervă V. NEGREI publică, în limba franceză, o broşură de 131 pagini, în care stabileşte o serie de rezultate, care să conducă la demonstrarea ultimei teoreme a lui FERMAT.

D-sa dovedeşte multă originalitate, atât prin metoda care duce la rezultatele obţinute, cât şi — trebue s'o spunem — prin stângăcia, am putea spune, ingenuitatea, vădită în expuneri şi raţionamente, lipsuri explicabile, de altfel, date fiind preocupările profesionale ale autorului, care face matematică *„în orele libere"*, lipsuri care fac însă foarte dificilă citirea şi urmărirea lor.

Suntem de acord cu D-sa, în a recunoaşte că *nu este la zi cu rezultatele curente* din *Teoria numerelor:* altfel, ar fi observat că multe din rezultatele D-sale relative la anumite ecuaţii diofantiene sunt particulare.

De exemplu, ecuaţia $ax^2 + by^2 = z^m$ nu admite numai soluţii ca $z = au^2 + by^2$. LAGRANGE a dat toate formele posibile ale divizorilor numerelor de forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ (*Oeuvres*, I, 3, p. 700 şi urm.). De asemeni, D-l G-l NEGREI nu s'a folosit de faptul că soluţia ecuaţiei pitagoriene $c^2 = a^2 + b^2$, cu a, b, c prime între ele, este

$$a = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \quad , \quad b = \alpha\beta \quad , \quad c = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \, ,$$

cu α şi β prime între ele, din care ar fi rezultat imediat expresiile numerelor P, U, X din teorema I (p. 13) şi ar mai fi rezultat imediat că, dacă a, b, c sunt puterile k ale unor întregi, urmează aceeaşi concluzie şi pentru α şi β regăsind astfel teorema II (p. 22). Demonstraţia teoremei I (p. 13) este atât de confuză şi de incomplectă, încât numai găsind o altă, foarte simplă şi imediată, am putut crede în valabilitatea acestei teoreme.

Printre diferitele rezultate obţinute, semnalăm teorema (5 p. 30) după care, dacă ecuaţia

$$(1) \qquad c^n = a^n + b^n$$

este satisfăcută în întregi când $n = 2^\alpha s$, atunci este satisfăcută şi pentru $n = s$, cu s întreg impar. Păcat că D-l G-l NEGREI nu a demonstrat reciproca acestei teoreme, căci astfel chestiunea teoremei lui FERMAT ar fi fost închisă!

---

1) A se vedea şi recenzia făcută de D-l I. IONESCU la pag. 611 *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX.

Ultima teoremă a lui FERMAT constă în afirmaţia că *ecuaţia* (1) *nu este posibilă în întregi decât pentru* $n = 1$ *şi* $n = 2$. S'au dat demonstraţii pentru multe cazuri particulare. KUMMER a demonstrat-o pentru $n = 2k$. De când KUMMER a inventat *idealele*, în vederea demonstrării teoremei lui FERMAT, se crede că aceasta nu poate fi demonstrată cu mijloacele elementare ale *Teoremei numerelor*, ceea ce, iarăşi, nu a ştiut D-l G-l NEGREI.

Intr'un spaţiu prea restrâns, ca acesta, nu putem face o analiză amănunţită a întregii lucrări. Semnalăm deci, în treacăt, numai câteva lipsuri mai strigătoare.

Teorema 4, p. 28, dă numai un rezultat parţial, căci formulele (18) care se aplică ecuaţiei (33), scrisă sub forma dela începutul pag. 29, se referă la cazul când necunoscutele, care aci sunt $\frac{b^k \pm x^k}{2}$, ar fi puterile k ale unor întregi, ceea ce aci nu este necesar. Aceeaşi eroare s'a mai făcut la pag. 82, 84, etc.

Lemele 1—7 (pag. 46—58) nu sunt demonstrate ci verificate în cazurile particulare cele mai simple. Dar o eroare singulară de raţionament, făcută cu această ocazie, găsim la pag. 58 şi în altele: *dacă o anumită ecuaţie* (*e*) *a provenit, într'o anumită problemă, dintr'o altă ecuaţie* (E), *nu rezultă că oricând vom întâlni o ecuaţie* (*e*) *o vom considera ca o consecinţă a ecuaţiei* (E), *căci* (*e*) *poate exista independent de* (E)!! Toate cele şapte leme se pot demonstra riguros, căutând o identitate de forma

$$(au^2 + buv + cv^2)(ax^2 + bxy + cy^2) = aX^2 + bXY + cY^2.$$

Pentru teorema lui FERMAT, autorul dă patru demonstraţii (teorema 8, p. 77—85)! Prima este o simplă verificare pe un caz particular. In a doua, scrie ecuaţia (1), cu $n = 2k$, $a = 2^e a_2$, a_2 impar,

$$c^{2k} = (2^{1k} a_2^k - b^k)^2 + 2^{1k+1} a_2^k b^k,$$

se pune (2) $c^k + b^k - 2^{1k} a_2^k = 2^{1k} \lambda^k$, se demonstrează apoi că λ^k este, în adevăr, puterea k a unui întreg, dar nu se demonstrează că primul membru al egalităţii (2) se divide prin 2^{1k}, ceea ce, de altfel, nici nu-i adevărat decât pentru $1k = 1$, căci la pag. 17 se arată că din (1) cu $n = 2k$ rezultă

$$c^k + b^k = 2a_1^{2k} \quad , \quad a_1 = 2^{1k-1} p^k + x^k,$$

unde a_1 este impar, căci x este impar dacă $1k > 1$.

In ipoteza că (2) ar fi satisfăcută, autorul conchide în mod just că (1) nu este satisfăcută pentru $n = 4s$. De aci însă, bazându-se pe teorema 5, p. 30, conchide că (1) nu este satisfăcută nici pentru $n = s$, ceea ce *nu este adevărat*, căci neexistenţa ecuaţiei (1) pentru $n = 4s$ nu atrage neexistenţa în cazul $n = s$. Astfel, din faptul că (1) nu există pentru $n = 4$ sau $n = 8$, nu se poate afirma că (1) nu există pentru $n = 1$ sau $n = 2$, căci ar fi un neadevăr. Este ca şi cum cineva ar pretinde că din divergenţa unei serii rezultă $\lim u_n \neq 0$!!

In a treia demonstrație, se consideră cazul $n = 4k$ — ceea ce este *inutil*, căci teorema lui FERMAT este deja demonstrată pentru $n = 4$ — și se ajunge la un sistem de ecuații de gradul $4s$, despre care se *observă* că nu poate avea loc decât dacă $\alpha = 0$ sau $2s = 1$, dar nu-i destul *a observa, trebue a demonstra*

In a patra, consideră tot cazul $n = 4k$, obținând soluția sub două forme diferite și conchizând că acestea nu pot da aceleași rezultate, fără a demonstra această concluzie. In fapt, ar fi trebuit cercetat riguros dacă se pot determina y, p_0, z_1, p_2, astfel ca c^k și a^k, dați de (63) și (67), să coincidă, dar aceasta nu se poate vedea comparând *din ochi* expresiile lui y, p_0, z_1, p_2.

In concluzie, scopul urmărit în lucrare, demonstrarea teoremei lui FERMAT, nu a fost atins. Am ținut să semnalez câteva din viciile de demonstrație ale încercării făcute de D-l G-L NEGREI, pentru ca acei în mâna cărora ar încăpea broșura D-sale și care nu au pregătirea necesară să *nu* o ia de bună. De altfel aceasta era o datorie a *Gazetei Matematice* căreia i s'a trimis broșura și care a făcut un început de recenzie prin pana D-lui I. IONESCU [1]), care cerea lămurirea unei contraziceri între titlul și cuprinsul broșurei.

M. GHERMĂNESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1969. *Să se verifice identitatea*

$$1 + \sum_{i=1}^{p-2} n^i = \sum_{i=0}^{n-2} c_{p-i}^{i} (n-i)^{p-2-i}$$

și să se afle valoarea sumei

$$\sum_{i=1}^{p} (i-1)\, k_{p+1-i}^{n-2}$$

k_p^n *fiind combinările cu repetiție a* n *obiecte luate câte* p.

C. N. CAZACU.

Soluție, dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU (Student-inginer, București) și OCT. EM. GHEORGHIU (București).

Avem:

$$1 + \sum_{i=1}^{p-2} n^i = \frac{n^{p-1} - 1}{n-1}$$

$$\sum_{i=0}^{n-2} C_{p-i}^{i} (n-1)^{p-2-i} = \sum_{i=0}^{p-2} C_{p-i}^{i} (n-1)^{p-1-i}$$

$$= \frac{[(n-1)+1]^{p-1} - 1}{n-1} = \frac{n^{p-1} - 1}{n-1}.$$

1) *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, p. 611.

Prima şi ultima egalitate, verifică identitatea din enunţ. Pentru partea a doua a problemei observăm că

$$k_{p+1-i}^{n-2} = C_{p+n-2-i}^{n-2}$$

$$\sum_{i=1}^{p} (i-1)\, k_{p+1-i}^{n-2} = \sum_{i=2}^{p} (i-1)\, C_{p+n-2-i}^{n-2} =$$

$$= C_{n+n-4}^{n-2} + 2C_{n+n-5}^{n-2} + 3C_{n+n-6}^{n-2} + \ldots + (p-1)\, C_{n-2}^{n-2}$$

Insă se ştie că:

$$C_{n-2}^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = C_{n-1}^{n-1}$$

$$C_{n-2}^{n-2} + C_{n-1}^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = C_{n}^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{n-2}^{n-2} + C_{n-1}^{n-2} + C_{n}^{n-2} + \ldots + C_{p+n-5}^{n-2} = C_{p+n-4}^{n-1}$$

$$C_{n-2}^{n-2} + C_{n-1}^{n-2} + C_{n}^{n-2} + \ldots + C_{p+n-4}^{n-2} = C_{p+n-3}^{n-1}$$

Adunând membru cu membru aceste identităţi găsim:

$$\sum_{i=1}^{p} (i-1)\, k_{p+1-i}^{n-2} = C_{p+n-4}^{n-2} + 2C_{p+4-5}^{n-2} + \ldots + (p-1)_{n-2}^{n-2} =$$

$$= C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1} + \ldots + C_{p+n-4}^{n-1} + C_{p+n-3}^{n-1} = C_{p+n-2}^{n} = k_{p-1}^{n}$$

care este valoarea sumei căutate.

PROBLEMA 2947. *Să se arate, că dacă ecuaţia algebrică:*

$$f(x) = 0$$

are toate rădăcinile sale reale, ecuaţia:

$$125\,[f^2 + (f^2)'] - 275a\,[ff' + (ff') - af'f''] + 6a^4\,[f'f''' + (f'f''')'] - 6a^3 f\,(f'' + f''')' + a^2 (f + f')'\,(150f' - 50af''') + 55a^2 f'''\,(f - af') - a^2 f''\,(70f' - 55f) - 6a^3 f'f''' = 0$$

are de asemenea toate rădăciniie reale, a fiind un număr real, iar accentele însemnând derivare.

GH. C. TULLEA.

Conducându-ne după coeficienții numerici ai termenilor, ecuația dată se poate scrie:

$$125\,[f(f-af')+f'(f-af')+f\,(f'-af'')]-150a\,[f'(f-af')+f''(f-af')+f'(f'-af'')]+55a^2\,[f''(f-af')+f'''(f-af')+f''(f'-af'')]-6a^3[f'''(f-af')+f''''(f-af')+f'''(f'-af'')]=0$$

sau încă:

$$125\,[f(f-af')+(f(f-af')'\,]-150a\,[f'(f-af')+(f'(f-af'))']+55a^2[f''(f-af')+(f''(f-af')'\,]-6a^3[f'''(f-af')+(f'''(f-af')'\,]=0$$

deci dacă notăm:

$$(1)\quad \varphi(x)=(f-af')(125f-150af'+55a^2f''-6a^3f''')$$

ecuația dată se poate scrie

$$(2)\qquad \varphi(x)+\varphi'(x)=0$$

Reamintim că dacă ecuațiile:

$$f(x)=0 \qquad A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=0$$

au toate rădăcinile reale, atunci și ecuațiile:

$$f'(x)+af(x)=0$$

$$A_0f(x)+A_1f'(x)+A_2f''(x)\ldots+A_nf^{(n)}(x)=0$$

vor avea toate rădăcinile reale (probl. 30 și 31, cap. XXV, *Culegere de probleme de Algebră* de A. G. IOACHIMESCU, Partea II-a, 1939).

Deoarece putem scrie:

$$125x^3-150ax^2+55a^2x-6a^3=(5x-a)\,(5x-2a)(5x-3a)$$

în baza proprietății de mai sus, rezultă că ecuația $\varphi(x)=0$ are rădăcini reale și deci și ecuația (2) va avea rădăcini reale.

MIRCEA ADAM.

Notă. Această problemă a rămas până acum nerezolvată deoarece enunțul a fost publicat cu o eroare de tipar și anume s'a scris f'^2 în loc de $(f^2)'$. Domnul M. ADAM a fost acela care a atras atențiunea asupra acestei erori după care s'a publicat o erată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIII cu această corectare.

GENERAL G. LIT.

PROBLEMA 3784. *Fie un triunghiu* ABC, *o transversală oarecare* Δ *în plan şi transversala sa reciprocă* Δ'. *Cercurile lui* MIQUEL *relative la patrulaterele complete* (ABC, Δ) *şi* (ABC, Δ') *sunt egale şi tangente între ele.*

V. THÉBAULT.

Fie A_0, B_0, C_0 mijloacele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului şi α, β, γ respectiv α', β', γ' punctele unde transversalele reciproce Δ şi Δ' taie aceleaşi laturi, astfel încât

$$\alpha A_0 = A_0\alpha' \quad , \quad \beta B_0 = B_0\beta' \quad , \quad \gamma C_0 = C_0\gamma'.$$

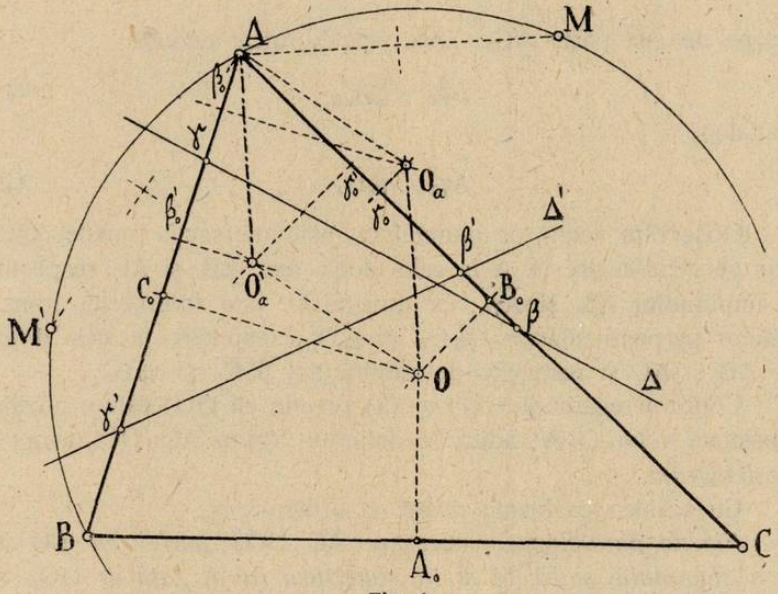


Fig. 1.

Fie O centrul cercului (ABC) şi M, M' punctele lui MIQUEL ale patrulaterelor (ABC, Δ) şi (ABC, Δ'), ele se găsesc pe cercul (ABC). Cercurile lui MIQUEL ale aceloraşi patrulatere conţin punctul O şi respectiv punctele M şi M', pentru a le determina este de ajuns deci, a construi, în afară de cercul (ABC), câte un cerc de fiecare patrulater: alegem cercurile $(A\beta\gamma)$ şi $(A\beta'\gamma')$. Aceste cercuri taie cercul (ABC) respectiv în punctele lui MIQUEL M şi M'. Dacă O_a şi O_a' sunt centrele lor, *cercurile lui* MIQUEL *ale celor două patrulatere sunt* (OO_aM) *şi* $(OO_a'M')$.

Să observăm că M *şi* M′ *sunt simetricele lui* A *faţă de liniile centrelor* OO_a *şi* OO'_a.

Centrul O_a este la intersecţia perpendicularelor pe AB şi AC în mijloacele β_0 şi γ_0 ale laturilor $A\gamma$ şi $A\beta$ în triunghiul $(A\beta\gamma)$.

Analog, centrul O'_a este la intersecţia perpendicularelor pe AB şi AC în mijloacele β'_0 şi γ'_0 ale laturilor $A\gamma'$ şi $A\beta'$ în triunghiul $(A\beta'\gamma')$.

Cu acestea, putem scrie:

$$\overline{AC_0} = \frac{1}{2}(\overline{A\gamma} + \overline{A\gamma'}) = \overline{A\beta_0} + \overline{A\beta'_0}$$

dar, pe de altă parte $\overline{AC_0} = \overline{A\beta'_0} + \overline{\beta'_0 C_0}$, încât rezultă:

$$\overline{A\beta_0} = \overline{\beta'_0 C_0} \qquad (1)$$

şi analog:

$$\overline{A\gamma_0} = \overline{\gamma'_0 B_0}. \qquad (2)$$

Observăm acum, că punctul O_a este intersecţia translatatelor unor perpendiculare în A la cele două axe AB şi AC respectiv de amplitudini $\overline{A\beta_0}$ şi $\overline{A\gamma_0}$, iar punctul O este intersecţia translatatelor perpendicularelor $\beta'_0 O'_a$ şi $\gamma'_0 O'_a$, respectiv la cele două axe AB şi AC şi respectiv de amplitudini $\overline{\beta'_0 C_0}$ şi $\overline{\gamma'_0 B_0}$.

Conform egalităţilor (1) şi (2) rezultă că $\overline{OO_a}$ este o poziţie translatată a lui $\overline{O'_a A}$, adică în definitiv *figura* $AO_a OO'_a$ *este un paralelogram.*

Cu acestea problema revine la următoarea:

Fie un paralelogram oarecare $AO_a OO'_a$, *astfel ca* AO *să fie o diagonală, şi fie* M *şi* M′ *simetricul lui* A *faţă de* OO_a *şi* OO'_a. *Cercurile* $(OO_a M)$ *şi* $(OO'_a M')$ *sunt egale şi tangente.*

In adevăr, M şi M′ fiind simetricele lui A faţă de OO_a şi OO'_a rezultă:

$$OA = OM = OM' \quad ; \quad O_a A = O_a M \quad ; \quad O'_a A = O'_a M'$$

iar pe de altă parte având în paralelogramul dat:

$$O_a A = OO'_a \quad ; \quad O'_a A = OO_a$$

rezultă că *triunghiurile* $OO_a M$ *şi* $OO'_a M'$ *sunt egale* deci şi cercurile circumscrise lor sunt egale.

Să observăm că triunghiul $OO_a M$ este simetricul triunghiului $OO_a A$, iar triunghiul $OO'_a M'$, simetricul triunghiului $OO'_a A$, respectiv față de axele OO_a și OO'_a, deci centrele cercurilor circumscrise lor sunt simetrice față de aceleași axe astfel:

Fie o, a, a' mijloacele lui OA, OO_a, OO'_a. Pe perpendiculara în o pe OA se găsesc centrele o_a și o'_a ale cercurilor $(OO_a A)$ și (OO'_a) respectiv la intersecțiile cu perpendicularele în a și a' respectiv pe OO_a și OO'_a. Incât cu observația de mai sus, simetricul ω a lui o_a față de OO_a este centrul cercului $(OO_a M)$, iar simetricul ω' a lui o'_a față de OO'_a este centrul cercului $(OO'_a M')$.

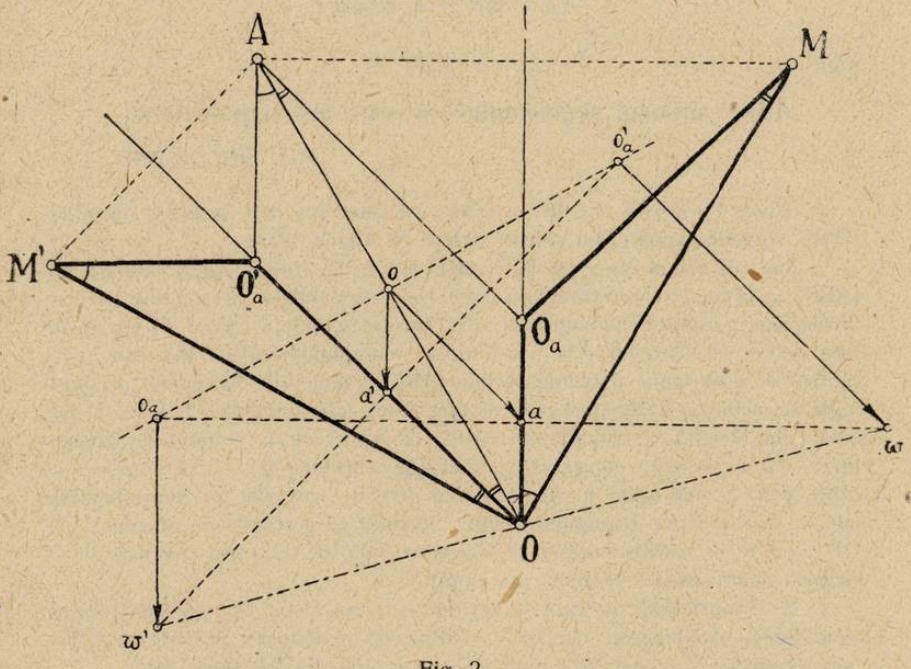


Fig. 2.

Cercurile $(OO_a M)$ și $(OO'_a M')$ fiind egale și având punctul O comun, rezultă că $\omega O = \omega' O$.

Vom arăta că ω *și* ω' *sunt simetrice față de punctul* O, *de unde rezultă tangența celor două cercuri în punctul* O. Problema revine la următoarea:

Fie o_a *și* o'_a *două puncte simetrice față de un punct* o *și* a, a' *două puncte oarecare. Simetricele* ω *și* ω' *respectiv ale*

punctelor o_a *şi* o'_a *faţă de* a *şi* a', *sunt simetrice faţă de al patrulea vârf* O, *al paralelogramului construit pe* oa *şi* oa'.

Faţă de un sistem de axe complex, de origină o, fie $\bar{k}$ şi $-\bar{k}$ afixele punctelor o_a şi o'_a, iar $\bar{a}$ şi $\bar{a'}$ afixele punctelor a şi a' unde $\bar{k}$, $\bar{a}$, $\bar{a'}$ sunt cantităţi complexe date, atunci se observă imediat că afixele punctelor ω, ω' şi O sunt respectiv:

$$\omega = \bar{k} + 2\bar{a} \quad , \quad \omega' = -\bar{k} + 2\bar{a'} \quad , \quad O = \bar{a} + a' .$$

Cu acestea mijlocul segmentului $\omega_a \omega'_a$ are ca afix:

$$\frac{1}{2}(\bar{k} + 2\bar{a} - \bar{k} + 2a')$$

sau

$$\bar{a} + a' .$$

Adică mijlocul segmentului $\omega\omega'$ este însuşi punctul O.

AD. GHEORGHIU.

Notă. 1°. D-l N. N. MIHĂILEANU, pe când era elev la liceul din Constanţa, a trimis următoarea soluţie datată 25 August 1932.

Fie (Γ) cercul circumscris triunghiului ($\alpha\beta\gamma$), ortoomologic triunghiului (ABC) în raport cu Δ. Triunghiul ($\alpha\beta\gamma$) se obţine luând intersecţiile perpendicularelor pe laturile triunghiului ABC în intersecţiile lor cu Δ. Se ştie că (Γ) este ortogonal cercului (O), circumscris triunghiului ABC, şi-l taie în ω, centrul de asemănare al triunghiurilor (ABC), ($\alpha\beta\gamma$) şi în Σ, centrul de omologie al aceloraşi triunghiuri. Cercul care trece prin punctele O, Γ, ω, Σ este cercul lui MIQUEL al triunghiului (ABC) în raport cu Δ. Notând cu aceleaşi litere, dar cu accent, construcţiile analoage obţinute din Δ', se observă că ($\alpha\beta\gamma$), ($\alpha'\beta'\gamma'$) sunt egale şi simetrice faţă de (O), vârfurile lor fiind simetrice faţă de mediatoarele triunghiului ABC. Rezultă că cercurile de diametre OΓ, OΓ' vor fi de asemeni egale şi simetrice faţă de O, deci tangente în O. Aceasta demonstrează teorema din enunţ.

2°. Proprietăţile pe care se sprijină soluţia D-lui N. N. MIHĂILEANU sunt date şi demonstrate de D-l V. THÉBAULT în articolul „*Triangles orthohomologiques et orthopôle*", publicat la pag. 156 din *Mathesis*, 1926.

3°. Partea finală a prea elegantei soluţii, dată de D-l AD. GHEORGHIU, se poate rezolva şi numai cu ajutorul relaţiilor între unghiuri. Ne referim la figura a doua. După ce s'a demonstrat că cercurile (ω), (ω') şi triunghiurile OO_a M, OO'_a M' sunt egale, deducem

$$\sphericalangle MOO_a = \sphericalangle O_a OA = \sphericalangle OAO'_a = \sphericalangle OM'O'_a . \qquad (1)$$

Apoi în triunghiul $OM'O'_a$ avem

$$2(\sphericalangle OM'O'_a + \sphericalangle M'OO'_a) = \sphericalangle O\omega'M' \qquad (2)$$

căci ω' este centrul cercului circumscris triunghiului.

In fine

$$\sphericalangle M'O\omega' = \sphericalangle MO\omega$$

pentrucă cercurile (ω), (ω') şi triunghiurile $OO_a M$, $OO'_a M'$ sunt egale.

In triunghiurile isoscele $O\omega'M'$ şi $O\omega M$ avem

$$\sphericalangle O\omega'M' + \sphericalangle \omega'OM' + \sphericalangle \omega'M'O = \sphericalangle O\omega M + \sphericalangle \omega OM + \sphericalangle \omega MO = \pi.$$

Dar ţinând seamă de (1) şi (2)

$$\sphericalangle O\omega'M' = \sphericalangle O_a OA + \sphericalangle MOO_a + \sphericalangle M'OO'_a + \sphericalangle O'_a OA = \sphericalangle M'OM$$

şi deci

$$\sphericalangle \omega'OM' + \sphericalangle M'OM + \sphericalangle \omega OM = \pi$$

ceea ce arată că punctele ω, O, ω' sunt colineare.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5747. *Laturile unui unghiu drept cu vârful în punctul fix* A, *întâlnesc în* B, C *şi* B', C' *două drepte paralele* Δ *şi* Δ'. *Să se determine poziţia unghiului drept aşa încât suprafaţa patrulaterului* BCB'C' *să fie egală cu un număr dat.*

G-L GH. BUICLIU.

I. *Soluţie şi generalizare*, date de D-l S-LT. M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

Fie α o valoare oarecare a unghiului din A şi

$$\overline{AD} = h \quad , \quad \overline{DD'} = d \quad ; \quad BC = x \quad ; \quad BCB'C' = S$$

în care D, D' sunt proiecţiile lui A pe Δ şi Δ'. Se vede imediat pe o figură că

$$\frac{x}{B'C'} = \frac{h}{h+d} \quad \therefore \quad B'C' = \frac{x(h+d)}{h}$$

$$S = \frac{1}{2}\frac{(BC + B'C')d}{2h} \quad \therefore \quad S = \frac{d(2h+d)x}{2h}$$

$$x = \frac{2hS}{d(2h+d)}. \qquad (1)$$

Prin urmare pentru a avea suprafaţa dată S, unghiul A trebue să intercepteze pe Δ un segment BC de lungime x, dată de (1).

Construcţia acelui segment o facem în felul următor. Ducem prin A o paralelă la Δ şi pe ea luăm $AA_1 = x$, apoi pe AA_1 descriem un segment capabil de unghiul α. Arcul acestui segment va tăia pe Δ în două, unul sau niciun punct. Presupunem că Δ este tăiată de acel arc în două puncte C şi C'. Se duc dreptele CA, CA_1, iar prin A se duce o paralelă la CA_1, care taie pe Δ

în B. Dreptele AB, AC determină patrulaterul cerut. Plecând dela C′ se obține o altă soluție, iar dacă se ia simetricul lui A_1 față de A se mai obțin două soluții de poziție.

Problema poate avea cel mult 4 soluții.

Fie E mijlocul lui AA_1, O și R centrul și raza cercului construit AA_1C, și F mijlocul cercului $ACC'A_1$. Pentru a avea soluții trebue ca

$$EF \geqslant h \quad \therefore \quad R + \frac{x \operatorname{cotg}\alpha}{2} \geqslant h \quad \therefore \quad R \geqslant h - \frac{h S \operatorname{cotg}\alpha}{d(2d+\alpha)}.$$

II. *Soluție,* dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Avem de considerat trei cazuri, după cum A este exterior dreptelor Δ, Δ′, între aceste drepte sau pe una din ele.

1°. A *este exterior dreptelor* Δ, Δ′. Fie *h*, *h′* distanțele lui A la Δ și Δ′. Pentru precizare fie $h > h'$ și *k* o constantă. Avem:

$$k^2 = \text{aria } BCB'C' = \frac{\overline{BC} + \overline{B'C'}}{2}(h - h')$$

însă

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{h}{h'} \quad \therefore \quad B'C' = \frac{h'}{h} BC.$$

Deci

$$2k^2 = BC\frac{h^2 - h'^2}{h} \quad \therefore \quad BC = \frac{2hk^2}{h^2 - h'^2}. \tag{1}$$

Dacă A′ este proiecția lui A pe Δ′ și $\overline{BA'} = x$, atunci

$$x^2 + h^2 = \overline{AB}^2 \; ; \; (\overline{BC} - x)^2 + h^2 = \overline{AC}^2$$

care adunate, dau

$$x^2 + (BC - x)^2 + 2h^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\therefore \qquad x^2 - \overline{BC} \cdot x + h^2 = 0. \tag{2}$$

Ținând seamă de (1), realizantul acestei ecuații este

$$R = \frac{4h^2}{(h^2 - h'^2)^2}[k^4 - (h^2 - h'^2)^2]$$

R este pozitiv pentru

$$k^2 \geqslant h^3 - h'^2. \tag{3}$$

Deci în cazul 1° problema are soluții numai dacă *suprafața dată* k *este mai mare sau egală cu diferența patratelor având ca laturi pe* h *și* h′.

Ecuaţia (2) dă, în condiţiile (3), 2 sau o valoare pentru x. Vom avea deci 1 sau 4 poziţii pentru unghiul A, întru cât x poate fi luat de o parte sau de alta a lui A'.

2°. *Punctul* A *este între* Δ *şi* Δ'. In acest caz

$$\overline{BC} = \frac{2k^2h}{(h+h')^2} \quad \text{şi} \quad x^2 - \overline{BC} \cdot x + h^2 = 0. \qquad (4)$$

Avem soluţie dacă

$$k \geqslant (h+h')^2$$

adică dacă *suprafaţa dată este mai mare sau egală cu suprafaţa patratului construit pe distanţa între* Δ *şi* Δ'.

3°. A *este pe* Δ'. Soluţia se deduce din 1° sau 2° făcând $h' = 0$ în (2) sau (4). Avem

$$\overline{BC} = \frac{2k}{h} \quad \text{şi} \quad x = \frac{1}{h}\left[k \pm \sqrt{k^4 - h^4}\right].$$

Notă. 1°. D-l S-LT. N. ŞTEFĂNESCU a dat o foarte bună soluţie geometrică, calculând valoarea lui BC pe o cale diferită de cea dată în soluţia II.

2°. D-nii: S-LT. C. PANTELIMON, MIRCEA I. PĂTRĂŞCIOIU (Liceul Buzău) şi MIRCEA C. MANOLACHE (Student inginer, Bucureşti) au rezolvat problema cu ajutorul trigonometriei.

3°. Bune soluţii prin geometria analitică s'au primit dela D-nii: MIHAIL I. CONSTANTINESCU (Bacalaureat-Bucureşti), E. N. WEGENER (Bucureşti), NICOLAE V. IONESCU (Liceul „Radu Greceanu", Slatina), G. GH. DONŢU (Liceul de Aplicaţie, Iaşi), A. H. CUBAT (Liceul particular, Iaşi), CONST. V. PÂRVULESCU (Liceul „Gh. Şincai", Bucureşti) şi MARCEL D. COTARIU (Brăila).

EXERCIŢII

16. *Care sunt patratele perfecte de 6 cifre* abcdab *în care* cd *este dublul lui* ab?

T. STOICESCU.

R. Trebue avut

$$N^2 = ab\,10^4 + 2ab\,10^2 + ab = ab \times 101^2$$

de unde rezultă că ab este unul din patratele perfecte de 2 cifre, al căror dublu este mai mic ca 100, adică

$$ab = 01,\ 04,\ 09,\ 16,\ 25,\ 36 \text{ sau } 49$$

în care s'au considerat şi numerele formale. Găsim soluţiile

$$101^2 = 010201 \ ; \ 202^2 = 040804 \ ; \ 404^2 = 163216;$$
$$505^2 = 255025 \ ; \ 606^2 = 367236 \text{ şi } 707^2 = 499849.$$

17. *Să se găsească numărul de patru cifre* abcd *știind că el este produsul a doi factori de forma* mn *și* m0n *și că unul din numerele* ab, cd *este încincitul celuilalt.*

I. A. BARBU.

R. Deosebim 2 cazuri. 1°. Când

$$ab = 5 \cdot cd$$

$$(501) \times cd = mn \times mon = cd \times 3 \times 167$$

m0n trebue să se dividă prin 167. Singurul multiplu de 167 de forma *m0n* este 501 care nu satisface enunțul.

2°. Când $cd = 5ab$ avem

$$105 \times ab = mn \times m0n = 3 \times 5 \times 7 \times ab \quad \therefore \quad n \text{ este } 0 \text{ sau } 5.$$

Soluția $n=0$ nu e bună căci $m0$ sau $m00$ nu se divide prin 7 decât pentru $m=7$. Soluția $n=5$ dă $m=1$ și avem

$$1575 = 15 \times 105 \quad \text{cu} \quad 75 = 5 \times 15.$$

Exercițiul e un caz particular al problemei D-lui M. GHERMĂNESCU, Nr. 5750 rezolvată în G. M., Vol. XLIX, pag. 753.

18. 1°. *Suma tuturor numerelor de* n *cifre se divide cu 45.*

2°. *Suma tuturor numerelor de* n *și de* $n+1$ *cifre se divide cu 495.*

3°. *Să se calculeze suma tuturor numerelor de* n, $n+1, \ldots n+p$ *cifre.*

4°. *Suma tuturor numerelor de* n *cifre sporită cu primul număr de* $n+1$ *cifre este divizibilă cu 55.*

5°. *Să se generalizeze cazul 4°.*

MIHAI R. CONSTANTINESCU.

R. 1°. Primul și ultimul număr de n cifre sunt

$$a = 10^{n-1} \quad \text{și} \quad l = 10^{i} - 1.$$

Aceste numere formează o progresie aritmetică de $10^n - 10^{n-1}$ termeni. Suma progresiei va fi

$$S_1 = \frac{(10^n - 10^{n-1})(10^n + 10^{n-1} - 1)}{2} =$$

$$= 2^{n-2} \cdot 3^2 \cdot 5^{n-1}(10^n + 10^{n-1} - 1) = 45 \text{ m.}$$

La fel se găsește

$$2°. \quad S_2 = \frac{(10^{n+1} - 10^{n-1})(10^{n+1} + 10^{n-1} - 1)}{2} =$$

$$= 2^{n-2} \cdot 3^2 \cdot 5^{n-1} \cdot 11\,(10^{n+1} + 10^{n-1} - 1) = 495 \text{ m.}$$

$$3°. \quad S_3 = \frac{(10^{n+p} - 10^{n-1})\ (10^{n+p} + 10^{n-1} - 1)}{2} = 5^{n-1} \cdot (10^{n+1} - 1) \text{ m.}$$

$$4°. \quad S_4 = \frac{(10^n - 10^{n-1} + 1)\ (10^n + 10^{n-1})}{2} =$$

$$= 2^{n-2} \cdot 5^{n-1} \cdot 11\,(10^n - 10^{n-1} + 1) = 55 \text{ m.}$$

$$5°. \quad S_5 = \frac{(10^{n+p} - 10^{n-1} + 1)(10^{n+p} + 10^{n-1})}{2} = 5^{n-1} \cdot (10^{p+1} + 1) \text{ m.}$$

19. *Să se verifice formula:*

$$n! = \sum_{0}^{n-1} (-1)^p (n-p)\ (n-p+6)\ (n-p+12)\ \ldots\ [n-p+6\ (n-1]\ C_n^p$$

OCT. E. GHEORGHIU.

R. Se verifică formula pentru n egal 1, 2, 3, 4 şi apoi se întrebuinţează metoda inducţiei, adică se presupune că este adevărată pentru $n = i$ şi se verifică pentru $n = i + 1$.

20. *Notaţiile fiind cele obişnuite într'un triunghiu sferic, să se demonstreze că:*

1°. $\text{tg}^2 r_a \cdot \sin^2 (p-a) + \text{tg}^2 r_b \cdot \sin^2 (p-b) + \text{tg}^2 r_c \cdot \sin^2 (p-c) = 3\text{tg}^2 r \cdot \sin^2 p.$

2°. $\text{cosec}\ (p-a)\ \text{cosec}\ (p-b) + \text{cosec}\ (p-b)\ \text{cosec}\ (p-c) +$
$+ \text{cosec}\ (p-c)\ \text{cosec}\ (p-a) = (\text{cotg}\, r + 2\text{tg R}).\ \text{cotg}\, r.$

T. STOICESCU.

R. 1°. Întrebuinţăm:

$$\text{tg}\, r\ \text{tg}\, r_b\ \text{tg}\, r_c = \text{tg}\, r_a \cdot \sin^2 (p-a)$$

şi analoagele ei, amplificate respectiv cu $\text{tg}\, r_a$, $\text{tg}\, r_b$, $\text{tg}\, r_c$ pe care le adunăm membru cu membru; găsim că:

$\sum \text{tg}^2 r_a \cdot \sin^2 (p-a) = 3\text{tg}\, r \cdot \text{tg}\, r_a \cdot \text{tg}\, r_b \cdot \text{tg}\, r_c$; ori, $\text{tg}\, r_a \cdot \text{tg}\, r_b \cdot \text{tg}\, r_c = \text{tg}\, r \cdot \sin^2 p$

(a se vedea *„Culegere de probleme de trigonometrie"*, partea III, Trigon. sferică. V. CRISTESCU, ediţia revăzută şi adăogită de D-l G-ral GH. I. LITEANU, pag. 17, Ex. 1); găsim astfel partea I-a din enunţ.

2°. Avem:

$$\text{tg}\, r = \text{tg}\, \frac{A}{2} \cdot \sin (p-a)\ ;\quad \text{tg}\, r = \text{tg}\, \frac{B}{2} \sin (p-b)\ ;\quad \text{tg}\, r = \text{tg}\, \frac{C}{2} \sin (p-c);$$

prin înmulţire două câte două căpătăm:

$$\text{tg}\, \frac{A}{2}\, \text{tg}\, \frac{B}{2} = \text{tg}^2 r\ \text{cosec}\ (p-a)\ \text{cosec}\ (p-b)\ \text{etc. Ori}\ \sum \text{tg}\, \frac{A}{2}\, \text{tg}\, \frac{B}{2} = 1 + 2\text{tg R tg}\, r,$$

(cartea citată pag. 17 Ex. al doilea dela 14); prin urmare:

$$\text{tg}^2 r \cdot \sum \text{cosec}\ (p-a)\ \text{cosec}\ (p-b) = 1 + 2\text{tg R tg}\, r.$$

Prin împărţirea cu $\text{tg}^2 r$ avem chestiunea din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

6074. Să se demonstreze că dacă două puteri consecutive ale unui număr N se termină cu N, atunci toate puterile lui N se bucură de această proprietate, oricare ar fi baza de numerație.

G-L GH. BUICLIU.

6075. Să se demonstreze, *elementar*, că dacă $\varphi(N)$ este indicatorul lui N și n numărul factorilor primi diferiți ai lui N, atunci avem

$$\varphi(N) > \frac{1}{3\sqrt{n}} N.$$

TIBERIU POPOVICIU.

6076. Sfera (I) înscrisă în tetraedrul ABCD atinge fețele BCD, CDA, DAB, ABC în A', B', C', D'.

Perpendicularele în A pe fețele ACD, ABD, ABC, înțeapă planurile ICD, IBD, IBC respectiv în A_1, A_2, A_3. Se obțin punctele analoage (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3), (D_1, D_2, D_3) plecând dela vârfurile B, C, D și dela fețele triedrelor corespunzătoare formate de trei din dreptele AI, BI, CI, DI.

Să se demonstreze că planurile $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ sunt perpendiculare pe dreptele AA', BB', CC', DD'.

V. THÉBAULT.

6077. Să se demonstreze că între elementele unui triunghiu oarecare și elementele triunghiului său ortic, notate cu accent, avem relațiile:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & r_a & r'_a \\ 1 & r_b & r'_b \\ 1 & r_c & r'_c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & r_{a'} \\ 1 & b & r_{b'} \\ 1 & c & r_{c'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a' & r_a \\ 1 & b' & r_b \\ 1 & c' & r_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & r_a \\ 1 & b & r_b \\ 1 & c & r_c \end{vmatrix}.$$

MIRCEA ADAM.

6078. Se consideră matricea:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$ Punem $A_{pq} = \sum_{i=1}^{m} a_{ip}\, a_{iq}$.

1°. Să se arate că avem:

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p-1,1} & A_{p-1,2} & \dots & A_{p-1,p} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,p-1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p-1,1} & A_{p-1,2} & \dots & A_{p-1,p-1} \end{vmatrix}$$

2°. $$\sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{1,p-1} & 0 \\ A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,p-1} & A_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p-1,1} & A_{p-1,2} & \dots & A_{p-1,p-1} & A_{p-1,p} \end{vmatrix}^2$$

$$+ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,p-1} & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,p-1} & A_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{p-1,1} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,p-1} \\ A_{21} & \dots & A_{2,p-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{p-1,1} & \dots & A_{p-1,p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

ȘERBAN GHEORGHIU.

6079. Să se arate că între elementele unui triunghiu sferic ABC există relaţia

$$\frac{\sin(A-S)+\sin(B-S)+\sin(C-S)}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}+\operatorname{tg}\frac{b}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}.$$

M. GHERMĂNESCU.

6080. Să se construiască curba

$$x=\cos t \quad , \quad y=\frac{\sin t}{t}.$$

N. ABRAMESCU.

6081. Se dă o *quintică* şi un punct P în planul său. Să se arate că există cinci drepte trecând prin P, astfel că $M_i\,(i=1,2,3,4,5)$ fiind punctele în care una din drepte taie curba, iar M', M'' puncte date de

$$(PM'M_2M_3) = (PM''M_4M_5) = -1,$$

avem

$$(PM_1M'M'') = -1.$$

C. IONESCU-BUJOR.

6082. Doi pietoni mergând noaptea unul după altul la o *distanţă* a, *cu aceeaşi iuţeală* v, *sunt luminaţi de un vehicul în mişcare*. Se observă totuşi *că umbrele lor* pe un perete vertical *rămân nemişcate* şi situate la o distanţă *d*.

Să se determine *iuţeala vehiculului* şi *iuţeala cu care se mişcă umbra pe perete* în cazul unui pieton mergând pe acelaşi fir al drumului ca şi primii doi, cu aceeaşi iuţeală *v*, dar în sens contrar.

Drumul pietonilor, al vehicului şi marginea inferioară a peretelui se vor presupune rectilinii şi paralele, iar pietonii şi vehiculul de dimensiuni transversale nule.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La pag. 176 rândul 8 de jos se înlocueşte $\sigma < 0$ prin $\sigma > 0$. La pag. 187 rândul 6 de sus se înlocueşte *structura conţinutului* prin *structura continuului.*

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbaiani A. (6015, 21, 29, 47); *Bărbulescu C. V.* (5954, 81, 6039); *Braşoveanu D. Gh.* (6036, 47); *Cantuniar I. Cr.* (5907, 12, 6036, 47); *Columbeanu D. P.* (5954, 66, 80, 6029, 36, 46); *Constantinescu R. M.* (5857, 81, 912, 13, 70, 6002, 06, 08, 09, 24, 29, 36, 46, 47, 50, 53, 60); *Cotariu D. M.* (5875, 926, 54, 60, 65, 66, 68, 76, 6002, 05, 21, 27, 29, 36, 39, 40, 43, 46, 47); *Dumitrescu Gh. Tr.* (6002, 47); *Goldiş Th. Gh.* (6043, 47, N); *Ionescu F. Petre* (5167, 6036, 47, 53); *Leon A. M.* (5076, 954, 81, 6029, 39, 47, 53); *Munteanu Gh. Lucian* (5813, 96, 97, 6047); *Mustăcescu Tr.* (6046); *Neculau Gr. Const.* (6047); *Petculescu Mircea* (6029, 47); *Popescu I. Barbu* (5581, 926, 54, 66, 71, 80, 6002, 47); *Soare V. Mircea* (5765, 839, 41, 920, 36, 81); *Timotin Al. Al.* (5860, 75, 936, 44, 53, 81, 6002, 39).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XVI şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 400

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 300

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 300

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 29.309.

Biblioteca Profesorilor
No. .....

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1945

SUMARUL

1. O donaţie . . . . . *Delegaţia Societăţii.*
2. Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei omogene de gradul al doilea. . . . . *N. Georgescu Roegen.*
3. Asupra triunghiurilor triomologice şi tetraedelor tetraomogene . . . . . *C. Ionescu-Bujor.*
4. Raportul comisiunii pentru Premiul de Aritmetică . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 21 — 23.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 334.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 5276, 5320, 5832, 5865, 5937, 5981.
10. Exerciţii: 21—25.
11. Probleme propuse: 6083 — 6091.

ABONAMENTUL [illegible] EI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1945

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici, Directorul Statisticei Financiare; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **60**06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133.

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 400

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. .....

O DONAȚIE

La pag. 225 în numărul de pe Ianuarie din acest volum s'a anunțat la rubrica *Diverse* că din cauza urcării crescânde a prețurilor a fost nevoie să se reducă formatul revistei și s'a exprimat dorința și speranța de a ieși cât mai repede din criza care apasă toate domeniile ecomice ale vieții.

Niciun alt comentariu și nici vreun fel de apel nu însoțeau sau nu reieșea din aceste rânduri. Și totuși, dintr'un colț al țării ne vine un ecou spontan și materializat.

In ziua de 26 Februarie 1945 primim dela Liceul „Traian" din Turnu-Severin următoarea scrisoare care poartă N-rul 953 și data de 14 Februarie 1945:

Domnului Președinte al Soc. „Gazeta Matematică", București

„Fiind informați de D-l Profesor GH. BAZACOV, *membru al „Societății* Gazeta Matematică, *despre situația critică prin care „trece anul acesta, valoroasa revistă de specialitate a acestei „Societăți, am hotărît împreună cu D-sa, cu ceilalți profesori de „Matematici, D-nii:* C. STUPARU *și* OCTAV BUȘILĂ *precum și cu „toți elevii liceului nostru, să ne alăturăm de urgență la efortul „pe care-l face în prezent Onor. Societatea, rugându-vă să bine- „voiți a primi suma de lei 100.000 (una sută mii) pe care am „expediat-o prin mandat poștal Nr. 116/8.13.II.1945.*

„Această sumă cuprinde 87.500 lei contribuția elevilor acestui „liceu și restul de 13.500 lei o veți socoti ca abonament de sprijin „pe care-l face liceul anul acesta, pentru revistă și supliment.

„Odată cu numerele apărute în prezent al Revistei Matematice „și ale suplimentului, vă rugăm să confirmați primirea sumei de „mai sus prin două chitanțe și anume:

1. *„O chitanță pentru suma de lei 87.500 reprezentând „contribuția elevilor;*

2. *„O chitanță pentru suma de 13.500 lei ca abonament de „sprijin din partea liceului „Traian", Turnu-Severin.*

„Primiți vă rog, Domnule Președinte, asigurarea deosebitei „noastre considerațiuni".

Director, D. DINCU. *Secretar,* D. BREHIU.

Delegaţia Societăţii *Gazeta Matematică* va face formele statutare pentru primirea donaţiei şi va răspunde cum se cuvine direcţiunii, corpului profesoral şi elevilor liceului „Traian“ din Turnu-Severin.

Revista *Gazeta Matematică* are de scop să stimuleze învăţământul matematicilor şi se foloseşte ca mijloace de sacrificiile de bani şi de timp ale membrilor societăţii *Gazeta Matematică*.

Cât a reuşit în acest scop şi cu aceste mijloace se vede atât din conţinutul celor 50 volume ale revistei cât şi mai ales din pleiada acelora cari şi-au descoperit aptitudinile ştiinţifice şi tehnice numai în contactul cu *Gazeta Matematică*.

Dacă am publicat aici în întregime conţinutul scrisoarei, este pentru a marca sponteneitatea unui gest şi a sublinia entuziasmul pe care-l poate crea chiar recea ştiinţă a matematicilor.

Mulţumind iniţiatorilor acestui gest le urăm să-şi păstreze elanul pentru susţinerea tuturor cauzelor bune ale neamului.

GAZETA MATEMATICĂ.

REZOLVAREA IN NUMERE INTREGI A ECUAŢIEI OMOGENE DE GRADUL AL DOILEA

Cu această problemă, în general sau sub forme particulare, s'au mai ocupat în „G. M.“ D-nii EMIL ŞTEFĂNESCU (Vol. XXXII, pp. 248 şi 287) şi I. B. FLORESCU (Vol. XXXVI, p. 248 şi Vol. XXXVII, p. 45).

Foarte probabil, problema rezolvării în numere întregi a ecuaţiei omogene de gradul al doilea este de multă vreme tratată pe larg. S'ar putea ca însăşi rezultatele autorilor menţionaţi să fi făcut obiectul unor cercetări anterioare. Cu toate acestea, din cauza unor împreciziuni cari s'au strecurat în lucrările citate, am socotit că o reexaminare a problemei n'ar fi lipsită de interes pentru corespondenţii *Gazetei Matematice*.

Fie ecuaţia

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{j} a_{ij} x_i x_j = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

unde a_{ij} sunt numere întregi. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că

$$(2) \qquad D(a_{11}, a_{12}, \ldots a_{nn}) = 1$$

D fiind simbolul celui mai mare comun divizor.

A rezolva în numere întregi ecuaţia (1) înseamnă a găsi *toate* sistemele de valori întregi x_i care să o verifice. Dacă un sistem satisface condiţiunea

$$(3) \qquad D(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1$$

atunci $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ constitue o *soluţie primitivă* a ecuaţiei date. Cunoscând toate soluţiile primitive, prin înmulţirea acestora cu un factor de proporţionalitate variabil, obţinem *toate soluţiile* în numere întregi. Prin urmare, rezolvarea ecuaţiei (1) se reduce la găsirea tuturor soluţiilor primitive.

A arăta că un anumit sistem verifică ecuaţia dată, nu înseamnă de loc a fi rezolvat-o, căci s'ar putea ca sistemul găsit să nu cuprindă toate soluţiile.

Astfel la pag. 250, Vol. XXXII, D-l EMIL ŞTEFĂNESCU afirmă că ecuaţia:

$$(4) \qquad x^2 = y^2 + z^2 + w^2$$

este rezolvată prin sistemul

$$(5) \quad x = A^2 + B^2 + C^2,\ y = -A^2 + B^2 + C^2,\ z = 2AB,\ w = 2AC.$$

Deşi acest sistem verifică ecuaţia (4), el nu cuprinde toate soluţiile, cum ar fi, de pildă, soluţia

$$(6) \qquad 7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2.$$

Cum D-l E. ŞTEFĂNESCU porneşte dela sistemul (5), pentru ca prin analogie să rezolve ecuaţia mai generală

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

toate rezultatele obţinute în Vol. XXXII, pp. 287—289, sunt, prin urmare, eronate.

Să notăm acum $y_i = \frac{x_i}{x_n}$. Ecuaţia (1) devine:

$$(7) \qquad \Sigma'_i \Sigma'_j a_{ij} y_i y_j + 2\Sigma'_i a_{i,n} y_i + a_{n,n} = 0$$

unde Σ' înseamnă că suma nu cuprinde indicii n.

Ecuația (7) trebue rezolvată în numere raționale. Ea reprezintă în spațiul cu $n-1$ dimensiuni o varietate patratică cu $n-2$ dimensiuni. Problema se reduce la a găsi punctul de pe această varietate care să aibă coordonatele raționale.

I. *Fie* $M_0(y_1^0, y_2^0, \ldots y_{n-1}^0)$ *un punct de coordonate raționale care să se găsească pe varietatea* (7). *Dacă prin* M_0, *ducem o dreaptă ai cărei parametrii directori sunt raționali* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})$, *dacă această dreaptă întâlnește varietatea* (7) *în alt punct* M_1, *acesta va avea de asemenea coordonatele raționale* [1]).

Fie

$$(8)\quad y_1 = y_1^0 + \alpha_1\lambda,\ y_2 = y_2^0 + \alpha_2\lambda, \ldots y_{n-1} = y_{n-1}^0 + \alpha_{n-1}\lambda$$

o dreaptă trecând prin M_0. Inlocuind în (7) și ținând seamă că M_0 se găsește pe varietate, obținem pentru determinarea lui λ ecuația

$$(9)\quad \lambda \Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}\alpha_i\alpha_j + \Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}(\alpha_i y_j^0 + \alpha_j y_i^0) + 2\Sigma_i' a_{i,n}\alpha_i = 0.$$

Dacă

$$(10)\quad \Sigma_j' a_{ij} y_j^0 + a_{i,n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

atunci M_1 se confundă cu M_0 pentru orice valori ale lui α_i.

Punctul M_0 este în acest caz un punct singular al varietății. Vom presupune că M_0 nu este singular. Aceasta înseamnă că varietatea (7) nu se reduce din punct de vedere real numai la puncte singulare, adică forma (7) nu este egală cu o sumă de patrate pozitive.

Presupunând acum că (10) nu este îndeplinit, însă că

$$(11)\quad \Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}\alpha_i\alpha_j = 0\ ,\ \Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}\alpha_i y_j^0 + \Sigma_i' a_{i,n}\alpha_i = 0$$

atunci λ este nedeterminat, dreapta aparține în întregime varietății. Dând lui λ orice valoare rațională (8) ne dă o soluție a lui (7). Aceste soluțiuni depind de poziția lui M_0.

In orice alt caz, înlocuind pe λ în (8) obținem:

$$(12)\quad y_k = \frac{y_k^0 \Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}\alpha_i\alpha_j - 2\alpha_k \Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}\alpha_i y_j^0 - 2\alpha_k \Sigma_i a_{i,n}\alpha_i}{\Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}\alpha_i\alpha_j}$$

---

1) Lema presupune în primul rând existența lui M_0. Însă se poate întâmpla să nu existe pe varietate niciun punct de coordonate raționale. De pildă, ecuația $x^2 + y^2 = 3$ nu are nicio soluție în numere raționale.

Deci M_1 are coordonate raţionale.

Vom numi soluţiunile cari satisfac condiţiunile (10), soluţiuni *singulare*, iar pe cele derivând din (11), soluţiuni *suplimentare ale sistemului* (12). Ultima denumire se justifică prin faptul că soluţiunile suplimentare nu sunt cuprinse în (12) şi că ele se schimbă cu sistemul, adică cu punctul M_0. Dacă varietatea nu este riglată nu avem soluţiuni suplimentare.

Fie acum (y_i') coordonatele unui punct singular M'. Din (10) deducem

$$\Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij} y_i' y_j' + \Sigma_i' a_{i,n} y_i' = 0$$

şi cum (y_i') verifică ecuaţia (7), deducem că pentru un punct singular

$$\Sigma_j' a_{i,j} y_j' + a_{i,n} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$$

care constitue condiţia necesară şi suficientă pentru ca un punct să se găsească pe varietate şi să fie singular.

Dreapta $M_0 M'$ este cuprinsă în varietate, căci

$$\Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}(y_i' - y_i^0)(y_j' - y_j^0) = \Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij}(y_i' y_j' + y_i^0 y_j^0) -$$

$$- 2\Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij} y_i' y_j^0 = \Sigma_i' y_i' \Sigma a_{ij} y_j' - 2\Sigma_i' a_{i,n} y_i^0 - a_{n,n} -$$

$$- 2\Sigma' y_i^0 \Sigma_j' a_{ij} y_j' = -\Sigma_i' a_{i,n} y_i' - 2\Sigma_i' a_{in} y_i^0 - a_{n,n} + 2\Sigma_i' a_{in} y_i^0 = 0$$

$$\Sigma_i' \Sigma_j' a_{ij} y_j^0 (y_i' - y_i^0) + \Sigma_i' a_{i,n}(y_i' - y_i^0) = 2\Sigma_i' a_{i,n} y_i^0 +$$

$$+ a_{n,n} - \Sigma_i' a_{i,n} y_i^0 + \Sigma_i' a_{i,n} y_i' - \Sigma_i' a_{i,n} y_i^0 = 0.$$

Prin urmare, soluţiunile suplimentare vor cuprinde şi toate soluţiunile singulare.

Rezumând:

a) Dacă membrul întâi al ecuaţiei (7) nu este o sumă de patrate pozitive şi dacă ecuaţia admite o soluţie în numere raţionale care să nu fie singulară, ea admite o infinitate de soluţiuni.

b) Aceste soluţiuni sunt date de sistemul (12), care constitue soluţia *generală* a ecuaţiei şi de (8) care constitue soluţiunea *suplimentară*. In (12) α_i este un număr raţional oarecare, iar în (8) α_i este o soluţie raţională a sistemului (11). In acest din urmă caz λ este tot raţional.

c) Din cauză că y_k este o expresie omogenă şi de gradul zero în raport cu parametrii α_i şi cum ecuaţiile (11) sunt şi ele

omogene, putem presupune că ne limităm numai la valorile întregi ale lui α_i pentru care

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}) = 1. \tag{13}$$

In acest caz, cum o dreaptă nu poate întâlni varietatea (7) decât într'un singur punct afară de M_0, iar dreptei care unește două puncte de coordonate raționale îi corespunde un singur sistem de întregi $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})$, soluțiile date de soluția generală sunt *distincte.*

Soluțiile suplimentare vor fi și ele *distincte* dacă λ nu ia de două ori aceiași valoare.

d) Fiecărei soluțiuni (y_i) îi corespunde o singură soluție primitivă (x_i) și reciproc.

e) Orice soluție a ecuației (1) va verifica ori soluția generală

$$\frac{x_k}{x_k^0 \sum_i' \sum_j' a_{ij}\alpha_i\alpha_j - 2a_k \sum_i' \sum_j' a_{ij}\alpha_i x_j^0 - 2a_k x_n^0 \sum_i' a_{i,n}\alpha_i} = \tag{14}$$

$$= \frac{x_n}{x_n^0 \sum_i' \sum_j' a_{ij}\alpha_i\alpha_j}$$

ori soluția suplimentară

$$\frac{x_k}{x_k^0 \nu + x_n^0 \alpha_k \mu} = \frac{x_n}{x_n^0 \nu} \tag{15}$$

unde am notat cu $\frac{\mu}{\nu}$ forma ireductibilă a lui λ.

Fie Δ și D cei mai mari divizori ai numitorilor rapoartelor (14) și (15) respectiv. Soluțiile primitive vor fi date de:

$$x_k = \pm \frac{1}{\Delta}(x_k^0 \sum_i \sum_j' a_{ij}\alpha_i\alpha_j - 2\alpha_k \sum_i' \sum_j' a_{ij}\alpha_i x_j^0 - 2\alpha_k x_n^0 \sum' a_{i,n}\alpha_i)$$

$$(k = 1, 2, \ldots n-1) \tag{16}$$

$$x_n = \pm \frac{1}{\Delta} \cdot x_n^0 \sum_i' \sum_j' a_{ij}\alpha_i\alpha_j$$

sau de

$$x_k = \pm \frac{1}{D}(x_k^0 \nu + x_n^0 \alpha_k \mu) \qquad x_n = \pm \frac{1}{D} \cdot x_n^0 \nu \tag{17}$$

Semnele se corespund.

In numărul viitor vom da câteva aplicațiuni.

(Va urma) N. GEORGESCU ROEGEN.

ASUPRA TRIUNGHIURILOR TRIOMOLOGICE ŞI TETRAEDELOR TETRAOMOLOGICE

1°. Condiţiile triomologiei a două triunghiuri au fost găsite prin diferite metode [1]).

Ne propunem să aflăm, pe altă cale, condiţiile triomologiei a două triunghiuri, să stabilim câteva proprietăţi ale acestor triunghiuri, să extindem, pe aceeaşi cale, problema în spaţiul cu trei dimensiuni.

2°. Să considerăm într'un plan triunghiurile $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, primul fiind luat triunghiu de referinţă al unui sistem de coordonate trilineare. Avem:

$$A_1\ (1, 0, 0)\ ,\quad A_2\ (0, 1, 0)\ ,\quad A_3\ (0, 0, 1)$$

$$B_1\ (x_1, y_1, z_1)\ ,\quad B_2\ (x_2, y_2, z_2)\ ,\quad B_3\ (x_3, y_3, z_3).$$

Un punct al dreptei A_1B_1 are coordonatele de forma

$$x_1 + \lambda_1,\ y_1,\ z_1\ .$$

Analog, punctele dreptelor A_2B_2, A_3B_3 au coordonatele

$$(x_2,\ y_2 + \lambda_2,\ z_2)\ ,\quad (x_3,\ y_3,\ z_3 + \lambda_3).$$

Pentru $\omega_1\,(A_1B_1,\ A_2B_2)$ se determină valori lui λ_1 şi λ_2, astfel ca

$$\frac{x_1 + \lambda_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2 + \lambda_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{deci} \quad \omega_1\left[\frac{z_1\,x_2}{z_2},\ y_1,\ z_1\right].$$

A_3B_3 trece prin acest punct, dacă

$$\frac{z_1\,x_2}{z_2\,x_3} = \frac{y_1}{y_3} = \frac{z_1}{z_3 + \lambda_3},$$

de unde condiţia omologiei triunghiurilor $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$:

$$x_2\,y_3\,z_1 = x_3\,y_1\,z_2. \qquad (1)$$

---

1) Al. Pantazi: *Gazeta Matematică*, Vol. XXI, p. 206,
G. I. Dumitrescu: *Gazeta Matematică*, Vol XXX, p. 46.
G. D. Simionescu: *Bulletin de Math. et de physique pures et appliquées*, Fasc. 16, 1935–36, p. 191.
C. Ionescu-Bujor: *Gazeta Matematică*, Vol. XLII, pag. 621 şi Vol. XLIII, p. 411.

Triunghiurile $A_1A_2A_3$, $B_2B_3B_1$ sunt omologice, dacă

$$x_3\, y_1\, z_2 = x_1\, y_2\, z_3. \qquad (2)$$

Condițiile (1) și (2) fiind îndeplinite, deci triunghiurile $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ fiind *biomologice*, rezultă și

$$x_1 y_2 z_3 = x_2 y_3 z_1.$$

Condiție ca triunghiurile $A_1A_2A_3$, $B_3B_1B_2$ să fie omologice. Așa dar:

a) *Două triunghiuri biomologice sunt și triomologice;*

b) *Condițiile ca triunghiul fundamental* $A_1A_2A_3$ să fie triomologic cu $B_1B_2B_3$ sunt

$$x_1 y_2 z_3 = x_2 y_3 z_1 = x_3 y_1 z_2.$$

3°. *Fiind date în planul triunghiului* $A_1A_2A_3$ *punctele* B, B_2, *se poate determina un punct* N *și numai unul astfel ca* $A_1A_2A_3$, B_1B_2 N *să fie triomologice.*

In adevăr, dacă N (x, y, z) și ținem seama de condițiile triomologiei, se găsește:

$$x : y : z = \frac{1}{y_1 z_2} : \frac{1}{z_1 x_2} : \frac{1}{x_1 y_2}. \qquad (3)$$

4°. Notând ω_1, ω_2, ω_3 centrele de omologie ale triunghiului $A_1A_2A_3$ cu $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_1$, $B_3B_1B_2$, avem

$$\omega_1\,[z_1x_2,\ y_1z_2,\ z_1z_2] \quad ,\quad \omega_2\,[z_2x_3,\ y_2z_3,\ z_2z_3]$$

$$\omega_3\,[z_3x_1,\ y_3z_1,\ z_3z_1].$$

Condiția de colinearitate a centrelor de omologie este:

$$x_1 y_1 z_2^2 z_3^2 + x_2 y_2 z_3^2 z_1^2 + x_3 y_3 z_1^2 z_2^2 - z_1^2 z_2 z_3 x_2 y_3$$
$$- z_1 z_2^2 z_3 x_3 y_1 - z_1 z_2 z_3^2 x_1 y_2 = 0.$$

Presupunând date punctele A_1, B_2 și înlocuind pe x_3, y_3, z_3 prin valorile date de (3), se găsește relația pe care trebue să o satisfacă coordonatele a două puncte B_1, B_2 pentru ca triunghiurile cu baza B_1B_2 să fie triomologice cu $A_1A_2A_3$, cele trei centre de omologie fiind colineare. Dacă B_1 este fix, B_2 descrie o cubică. Deci:

Dându-se un punct $B_1\,(x_1, y_1, z_1)$ în planul triunghiului fundamental $A_1A_2A_3$, locul geometric al punctelor B_3 care

determină baza B_1B_2 a unui triunghiu triomologic cu $A_1A_2A_3$ având cele trei centre de omologie colineare este cubica:

$$z_1^2 z_1 zy^2 + y_1^2 x_1 xz^2 + z_1^2 y_1 yx^2 - 3x_1 y_1 z_1 xyz = 0.$$

Această cubică este circumscrisă triunghiului fundamental și trece prin B_1.

5°. Vom da un exemplu de triunghiuri triomologice:

Fie în planul triunghiului de referință $A_1A_2A_3$ un punct

$$P_1 (x', y', z') \text{ și } P_2 (y', z', x') , P_3 (z', x', y')$$

permutantele sale directe.

Triunghiurile $A_1A_2A_3$, $P_1P_2P_3$ sunt triomologice, iar două centre de omologie sunt permutantele celuilalt.

6°. Metoda folosită se aplică întocmai spațiului cu 3 dimensiuni, pentru a arăta că:

„Două tetraedre triomologice sunt și tetraomologice".

In adevăr, fie $A_1A_2A_3A_4$ tetraedrul fundamental al unui sistem de coordonate tetraedrice și $B_1B_2B_3B_4$ omologicul său.

Avem:

$$A_1 (1, 0, 0, 0), \quad A_2 (0, 1, 0, 0), \quad A_3 (0, 0, 1, 0), \quad A_4 (0, 0, 0, 1)$$

$$B_i (x_i, y_i, z_i, t_i) \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Un punct al dreptei A_1B_1 are coordonatele

$$x_1 + \lambda_1, y_1, z_1, t_1 ;$$

Un punct al dreptei A_2B_2 are coordonatele

$$x_2, y_2 + \lambda_2, z_2, t_2 .$$

A_1B_1, A_2B_2 se întâlnesc, dacă se ia pentru λ_1, λ_2 valori astfel ca:

$$\frac{x_1 + \lambda_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2 + \lambda_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

deci dacă există și condiția

$$z_1 t_2 = t_1 z_2. \tag{5}$$

Luând

$$\lambda_1 = \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{z_2},$$

coordonatele punctului de întâlnire ω, sunt:

$$\frac{x_2 z_1}{z_2},\ y_1,\ z_1,\ t_1.$$

$A_3 B_3$ trece prin ω_1, dacă se ia pentru λ_3 valoarea care verifică

$$\frac{z_2 z_1}{z_2 x_3} = \frac{y_1}{y_3} = \frac{z_1}{z_3 + \lambda_3} = \frac{t_1}{t_3}$$

și există condițiile:

$$y_1 t_3 = y_3 t_1. \tag{6}$$

$$x_2 y_3 z_1 = x_3 y_1 z_2. \tag{7}$$

In fine, $A_4 B_4$ trece prin ω_1, dacă se determină λ_4, astfel ca

$$\frac{x_2 z_1}{z_2 x_4} = \frac{y_1}{y_4} = \frac{z_1}{z_4} = \frac{t_1}{t_4 + \lambda_4}$$

și există condițiile:

$$y_1 z_4 = z_1 y_4. \tag{8}$$

$$x_2 y_4 z_1 = x_4 y_1 z_2. \tag{9}$$

Ținând seamă de (5), (6), (8), condițiile (7), (9) se transformă în

$$x_3 y_4 = x_4 y_3 \quad \text{și} \quad t_2 x_3 = x_2 t_3.$$

Incât condițiile omologiei tetraedrelor $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ sunt:

$$x_3 y_4 = y_3 x_4,\ y_4 z_1 = y_1 z_4,\ z_1 t_2 = z_2 t_1,\ t_2 x_3 = t_3 x_2,\ y_1 t_3 = y_3 t_1. \tag{10}$$

Analog se obțin condițiile:

$$x_4 y_1 = y_4 x_1,\ y_1 z_2 = y_2 z_1,\ z_2 t_3 = z_3 t_2,\ t_3 x_4 = t_4 x_3,\ y_2 t_4 = y_4 t_2. \tag{11}$$

și

$$x_1 y_2 = y_1 x_2,\ y_2 z_3 = y_3 z_2,\ z_3 t_4 = z_4 t_3,\ t_4 x_1 = t_1 x_4,\ y_3 t_1 = y_1 t_3. \tag{12}$$

de omologie ale tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ cu $B_2B_3B_4B_1$ și $B_3B_4B_1B_2$.

Din multiplicarea primelor relații din (10), (11), (12) se deduce

$$x_2 y_3 = y_2 x_3.$$

Analog, din multiplicarea celorlalte,

$$y_3 z_1 = y_1 z_3,\ z_4 t_1 = z_1 t_4,\ t_1 x_2 = t_2 x_1,\ y_4 t_2 = t_4 y_2,$$

relaţii care arată că tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ este omologic cu $B_4B_1B_2B_3$ adică tetraedrele triomologice $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ sunt şi tetraomologice.

Condiţiile tetraomologiei a două tetraedre sunt (10), (11), (12).

7°. Să considerăm determinantul

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

şi să notăm X_i, Y_i, Z_i minorii elementelor x_i, y_i, z_i.

Ecuaţia dreptei B_2B_3 este

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

deci

$$X_1 x + Y_1 y + Z_1 z = 0.$$

Coordonatele dreptei B_2B_3 sunt (X_1, Y_1, Z_1). Analog se găseşte B_3B_4 (X_2, Y_2, Z_2), B_1B_2 (X_3, Y_3, Z_3). Avem şi A_2A_3 $(1, 0, 0)$, A_3A_1 $(0, 1, 0)$, A_1A_2 $(0, 0, 1)$.

Condiţiile şi teorema triomologiei se stabilesc în coordonate tangenţiale, folosind întâlnirea laturilor corespunzătoare pe o dreaptă, la fel cum s'au stabilit folosind coordonatele punctuale. Aceste condiţii sunt:

$$X_1 Y_2 X_3 = X_2 Y_3 Z_1 = X_3 Y_1 Z_2.$$

Corelativa proprietăţii 3° este:

Dându-se o dreaptă A_2B_3 (x_1, y_1, z_1) în planul triunghiului fundamental $A_1A_2A_3$, înfăşurătoarea dreptei B_3B_1 care formează cu B_2B_3 vârful unui triunghiu triomologic cu $A_1A_2A_3$, având cele trei axe de omologie concurente este curba de clasa 3-a:

$$X_1^2 Z_1 Z Y^2 + Y_1^2 X_1 X Z^2 + Z_1^2 Y_1 Y X^2 - 3\ X_1 Y_1 Z_1 X Y Z = 0.$$

8°. Notând:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix}$$

şi X_i, Y_i, Z_i, T_i minorii elementelor x_i, y_i, z_i, t_i ca mai sus se stabilesc condiţiile omologiei tetraedrelor $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ astfel:

$X_3Y_4=X_4Y_3$, $Y_4Z_1=Y_1Z_4$, $Z_1T_2=Z_2T_1$, $T_2X_3=T_3X_2$, $Y_1T_3=Y_3T_1$, iar condiţiile tetraomologiei sunt (10), (11), (12), în care se înlocuesc literele mici cu litere mari,

C. IONESCU-BUJOR.

RAPORTUL COMISIUNII PENTRU PREMIUL DE ARITMETICĂ

Conform art. 2 şi 3 al regulamentului, acest premiu se acordă unui român, elev de liceu din ţară, pentru lucrările referitoare la aritmetică, dintre cele publicate în ultimul volum apărut, deci de data aceasta Vol. XLIX.

Constatăm că în acest volum nu s'a publicat niciun articol sau notă sub semnătura unui elev de liceu. S'au propus sub astfel de semnături exerciţiile 6 şi 20 şi problema 5980, ai căror propunători nu pot fi premiaţi numai pentru aceasta.

In volumul XLIX s'au publicat 36 probleme rezolvate, iar între rezolvitori se remarcă numele D-lui VASILE D. PĂLĂCEANU elev din clasa a VIII-a a Liceului militar „Mihai Viteazul" din Timişoara. D-sa este singurul care este citat la 9 probleme, adică la 25% din problemele de aritmetică rezolvate în Vol. XLIX şi anume este citat ca rezolvitor la problemele 5056, 5392, 5606, 5618, 5630, 5750, 5788, 5801 şi 5825.

Corespondentul, elev de liceu, care urmează în ordinea numărului citaţiilor este menţionat numai la 5 probleme fără ca natura problemelor sau a soluţiilor să-i dea dreptul la întâietate.

Propunem deci a se acorda premiul de 5.000 lei D-lui VASILE D. PĂLĂCEANU.

COMISIUNEA PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ARITMETICĂ

G-L GH. BUICLIU, ING. I. IONESCU,
PROF. P. SERGESCU.

Acest raport a fost citit şi aprobat de Adunarea generală dela 19 Februarie 1945.

NOTE MATEMATICE

21. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Pentru N_9 începând cu 7 am găsit următoarele 88 soluții:

N_9	N	N_9	N
701 432 856	6 312 895 704	732 145 608	6 589 310 472
701 438 562	6 312 947 058	732 145 860	6 589 312 740
701 564 328	6 314 078 952	745 620 381	6 710 583 429
701 645 328	6 314 807 952	745 621 038	6 710 589 342
701 658 342	6 314 925 078	746 832 150	6 721 489 350
702 138 645	6 319 247 805	748 236 501	6 734 128 509
702 386 451	6 321 478 059	748 236 510	6 734 128 590
704 532 168	6 340 789 512	748 356 021	6 735 204 189
705 342 168	6 348 079 512	748 356 102	6 735 204 918
705 642 381	6 350 781 429	750 342 681	6 753 084 129
706 452 381	6 358 071 429	751 034 268	6 759 308 412
706 458 231	6 358 124 079	754 612 038	6 791 508 342
708 236 451	6 374 128 059	754 913 820	6 791 524 380
708 423 561	6 375 812 049	754 836 012	6 793 524 108
710 238 645	6 392 147 805	756 041 328	6 804 371 952
710 564 238	6 395 078 142	756 213 048	6 805 917 432
710 645 238	6 395 807 142	758 413 260	6 825 719 340
710 645 823	6 395 812 407	760 145 328	6 841 307 952
710 842 356	6 397 581 204	760 345 281	6 843 107 529
712 063 548	6 408 571 932	760 813 245	6 847 319 205
712 306 548	6 410 758 932	760 821 345	6 847 392 105
712 658 430	6 413 925 870	761 034 528	6 849 310 752
713 264 508	6 419 380 572	761 230 548	6 851 074 932
713 548 620	6 421 937 580	761 254 830	6 851 293 470
714 653 280	6 431 879 520	761 524 380	6 853 719 420
720 563 481	6 485 071 329	762 145 830	6 859 312 470
721 056 348	6 489 507 132	763 482 501	6 871 342 509
723 016 548	6 507 148 932	763 482 510	6 871 342 590
725 348 601	6 528 137 409	763 802 145	6 874 219 305
725 348 610	6 528 137 490	764 381 250	6 879 431 250
726 458 301	6 538 124 709	768 134 205	6 913 207 845
726 458 310	6 538 124 790	768 142 305	6 913 280 745
730 215 648	6 571 940 832	780 435 162	7 023 916 458
730 465 812	6 574 192 308	780 463 215	7 024 168 935
730 546 812	6 574 921 308	781 325 406	7 031 928 654

1) Urmare la Nota 132 dela pag. 670, Vol. L.

N_9	N	N_9	N
781 435 206	7 032 916 854	783 541 026	7 051 869 234
781 650 324	7 034 852 916	783 602 154	7 052 419 386
782 135 406	7 039 218 654	784 021 536	7 056 193 824
782 365 041	7 041 285 369	784 603 215	7 061 428 935
782 365 104	7 041 285 936	784 620 351	7 061 583 249
782 403 651	7 041 632 859	785 014 326	7 065 128 937
782 410 365	7 041 693 285	785 032 146	7 065 289 314
783 265 014	7 049 385 126	785 042 361	7 065 381 249
783 540 261	7 051 862 349	785 104 236	7 065 938 124

G. L. GH. BUICLIU.

22. *Relaţii cu bisectoarele interioare ale unui triunghiu.* Notaţiile elementelor unui triunghiu fiind cele obişnuite şi ţinând seamă de relaţiile, cari dau valorile bisectoarelor interioare, şi anume :

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc} = \frac{2S}{b+c}\sqrt{\frac{bc}{rr_a}} = \frac{ah_a}{b+c}\sqrt{\frac{bc}{rr_a}};\ l_b = \ldots$$

precum şi de alte relaţii cunoscute ca :

$$\sum\frac{1}{r_a} = \frac{1}{r}\ ;\quad \Sigma r_a = 4R + r\ ;\quad \Sigma a r_a = 2p(2R - r),\ \text{etc.}\ldots$$

se pot deduce lesne următoarele relaţii :

$$(a+b)(b+c)(c+a)\,l_a l_b l_c = 8abcpS = 32pRS^2, \tag{1}$$

$$\frac{(b+c)^2}{bc}l_a^2 + \frac{(c+a)^2}{ca}l_b^2 + \frac{(a+b)^2}{ab}l_c^2 = 4p^2, \tag{2}$$

$$\frac{bc}{(b+c)^2}\cdot\frac{1}{l_a^2} + \frac{ca}{(c+a)^2}\cdot\frac{1}{l_b^2} + \frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{1}{l_c^2} = \frac{r}{4S^2}(4R+r), \tag{3}$$

$$\frac{1}{(b+c)^2}\cdot\frac{1}{l_a^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\cdot\frac{1}{l_b^2} + \frac{1}{(a+b)^2}\cdot\frac{1}{l_c^2} = \frac{2R-r}{8RS^2}, \tag{4}$$

$$\frac{l_a l_b l_c}{h_a h_b h_c} = \frac{16pR^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \tag{5}$$

$$\frac{(b+c)^2}{a}\cdot\left(\frac{l_a}{h_a}\right)^2 + \frac{(c+a)^2}{b}\cdot\left(\frac{l_b}{h_b}\right)^2 + \frac{(a+b)^2}{c}\cdot\left(\frac{l_c}{h_c}\right)^2 = \frac{4pR}{r} \tag{6}$$

$$\sum\frac{c}{(b+c)^2(c+a)^2 l_a^2 l_b^2} = \frac{1}{64RS^3}. \tag{7}$$

MARCEL D. COTARIU.

23. *Notă asupra unor identităţi.* Fie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

o identitate; adică funcţia f nu depinde de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; rezultă că

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Fie acum $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nişte variabile arbitrare. Avem evident

$$F(x \mid y) = \Sigma y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

deci şi forma adjunctă F a formei f este identic nulă.

Aplicaţii. Să considerăm identitatea LAGRANGE:

$$(1) \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 - \sum_{i,\, i=1}^{n} (a_i x_j - a_j x_i)^2 = 0.$$

Avem: $\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} = x_i \sum_{i=1}^{n} a_i - a_i \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - 2 \sum_{j=1}^{n} a_j (a_i x_j - a_j x_i)$

de unde identitatea:

$$(1') \quad \Sigma a_i^2 \cdot \Sigma x_i y_i = \Sigma a_i x_i \cdot \Sigma a_i y_i + \Sigma (a_i x_j - a_j x_i)(a_i y_j - a_j y_i)$$

care pentru $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se reduce la (1). Deci (1') generalizează identitatea LAGRANGE [1]).

La fel obţinem identităţile următoare, a căror origine o găsim uşor prin adaptarea $y_i = x_i$:

$$(2') \quad (x_1 + x_2 + x_3)^2 (y_1 + y_2 + y_3) = \Sigma x_1^2 y_1 + \Sigma (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(y_2 + y_3).$$

$$(3') \quad (x + y + z)(x' + y' + z') + (x + y - z)(x' + y' - z') + (z + y - x)(z' + y' - x') + (x - y + z)(x' - y' + z') = 4(xx' + yy' + zz').$$

N. N. MIHĂILEANU.

---

1) Menţionez şi următoarea identitate, care e o falsă generalizare

$$(1'') \quad \Sigma a_i x_i^2 \cdot \Sigma a_i y_i^2 = (\Sigma a_i x_i y_i)^2 + \Sigma a_i a_j (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

de unde şi forma

$$(A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 - t)(A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2 - t) + t[A_1 (x_1 - y_1)^2 + A_2 (x_2 - y_2)^2 + A_3 (x_3 - y_3)^2] = (A_1 x_1 y_1 + A_2 x_2 y_2 + A_3 x_3 y_3 - t)^2 + A_1 A_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + A_2 A_3 (x_2 y_3 - x_3 y_1)^2 + A_3 A_1 (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2.$$

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXIV. Nr. 12. Februarie 1945. C. C. TEODORESCU: Variaţia unei clasificări. C-DOR I. LINTEŞ: Relaţiuni cu indicatori. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

România Aeriană. Anul XIX. Nr. 1. Ianuarie 1945. C-DOR I. LINTEŞ: Bucureşti-New York în 6 ore. G-L I. BĂLĂNESCU: Ceva din patologia aviaţiei. G. COSTESCU: Cincizeci de ani de aviaţie românească. M. KONTESCHWELLER: GUGLIELMO MARCONI. VALENTIN POPESCU: Capitala ar putea fi aprovizionată cu planoare de transport. H. AUGUST: A fost odată. I. C. BĂŢICĂ: C-DORUL V. CONSTANTINESCU-BICE. GH. RADO: Numărul REYNOLDS şi aeromodelismul.

M. GHERMĂNESCU. Sur quelques équations fonctionnelles de Mr. D. POMPEIU. (Extras din *Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine.* Tome XXVI. No. 9).

CERERI

334. Într'un catalog al unui anticar din Leipzig, găsesc:
ISOPESKUL D.: *Das Theorem der Fourier'schen Reihen*, 1873.
Este român acest autor? Ce se ştie despre el şi unde a publicat acea lucrare?

M. G.

DIVERSE

a) Adunările Societăţii „Gazeta Matematică"

In Adunarea generală din ziua de 19 Februarie 1945 au fost aleşi membri ai societăţii noastre D-nii: MIRCEA ADAM şi Ing. STELIAN CETĂŢEANU.

b) Redacţionale

Ulterior redactării problemei 5894, rezolvată la pag. 231 din acest volum, s'au primit soluţii bune dela D-nii: M. R. CONSTANTINESCU şi AL. IEŞAN.

c) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

Dr. A. BLIND. Lehrbuch der Gleichungen des II. Grades mit einer Unbekannten. Stuttgart. Verlag Julius Maier, 1891.

Prof. C. METGER. Lehrbuch der Gleichungen des II. Grades mit zwei und mehreren Unbekannten. Stuttgart. Verlag Julius Maier, 1896.

Donate de D-l Ing. I. IONESCU.

ST. CHRISTESCU. Curbe integrale şi diferenţiale şi instrumente de calcul. 1889.

J. A. SERRET. Eléments d'Arithmétique. IV-e éd. Paris. Gauthier-Villars. 1865.

M. H. VERNIER. Arithmétique. 8-ème éd. Paris. L. Hachette & Co. 1848.

Donate de D-l Ing. T. I. GÂLCĂ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 5276. *Să se construiască grafic punctul al cărui triunghiu podar, faţă de un triunghiu dat, este echilateral.*

GH. D. SIMIONESCU.

Fie A', B', C' trei puncte pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghiu şi să notăm cu α, β, γ unghiurile triunghiului $A'B'C'$. Se poate demonstra uşor că [1]):

1. Cercurile $AB'C', BC'A', CA'B'$ se întâlnesc într'un punct P.

2. Coordonatele unghiulare ale acestui punct sunt:

$$(1) \qquad \sphericalangle BPC = A + \alpha \ , \ \sphericalangle CPA = B + \beta \ , \ \sphericalangle APB = C + \gamma.$$

De aci rezultă că punctul P se află la intersecţia segmentelor pe cerc capabile de unghiurile $A + \alpha$ şi $B + \beta$ descrise respectiv pe laturile $\overline{BC}$ şi $\overline{CA}$, încât construcţia este imediată.

Se desprind cu uşurinţă următoarele proprietăţi:

a) Pentru toate triunghiurile $A'B'C'$, înscrise în ABC şi asemenea între ele avem acelaşi punct P, deoarece coordonatele lui unghiulare depind numai de unghiurile lui ABC şi $A'B'C'$. Punctul P se numeşte *punctul pivot* al familiei de triunghiuri asemenea.

b) Triunghiul podar $A_1B_1C_1$ al lui P face parte din familia de triunghiuri asemenea $A'B'C'$, deoarece patrulaterele AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 sunt inscriptibile.

Cele expuse mai sus permit rezolvarea problemei mai generale: *„să se construiască grafic punctul al cărui triunghiu podar, faţă de un triunghiu ABC, este asemenea cu un triunghiu dat".*

1) Pentru informaţii mai amănunţite asupra problemei şi chestiunilor în legătură cu ea a se vedea *Capitolul 6* din *„La géométrie du triangle"* par TR. LALESCU.

In adevăr chestiunea se reduce la construcţia punctului pivot P având coordonatele unghiulare cunoscute, date de (1).

Să revenim la problema particulară propusă. In *„Géométrie du triangle"* par TR. LALESCU, se arată că punctele *isodinamice* sunt pivoturile triunghiurilor echilaterale înscrise în ABC.

Cum cele două puncte isodinamice W şi W' se află la intersecţia cercurilor lui APOLLONIUS, rezultă şi pe această cale o construcţie a punctelor cerute în enunţul problemei.

Coordonatele unghiulare ale celor două puncte, soluţii ale problemei, sunt pentru W: $A+60^0$, $B+60^0$, $C+60^0$, iar pentru W': $A-60^0$, $B-60^0$, $C-60^0$.

S'au primit soluţii bune dela D-nii: ALEXANDRU I. ROHR, MIRCEA D. POPA, P. P. DRĂGHICESCU (elevi liceul militar, Iaşi) SLT. PANTELIMON CONSTANTIN (Ploeşti) şi OCTAV C. GHEORGHIU (liceul internat Iaşi).

D-nii SLT. PANT. CONSTANTIN şi P. P. DRĂGHICESCU au observat că problema e o consecinţă imediată a celor tratate în lucrarea citată a lui TRAIAN LALESCU.

PROBLEMA 5320. *Fie* ABCD *un patrulater înscris în cercul* (O) *şi* EF *cea de-a treia diagonală a sa. Se consideră înălţimile triunghiului* EBC. *Centrele cercurilor, care trecând prin* O, *centrul cercului* O, *are cu acest cerc ca axe radicale una din înălţimile triunghiului* EBC, *au aceeaşi dreaptă* Δ_1. *Prin construcţii analoage se obţin pentru triunghiurile* EAD, FAB, FCD *dreptele* $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$.

Să se arate, că dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 *sunt concurente în acelaşi punct.*

TEODOR GH. COCEA.

1. Fie un cerc oarecare (O) cu centrul O şi raza R, o dreaptă Δ; fie P polul dreptei Δ în raport cu cercul (O) şi ω mijlocul segmentului OP.

Cercul cu centrul ω *şi cu raza* $\frac{\overline{OP}}{2}$ *trece prin* O *şi are cu cercul* O *ca ax radical dreapta* Δ.

Fie M punctul unde dreapta (Δ) taie pe OP. Punctul M este conjugatul armonic al lui P în raport cu cercul (O) şi avem

$$\overline{OM} \cdot \overline{OP} = R^2. \qquad (1)$$

a) Să presupunem că dreapta (Δ) taie cercul (O) în punctele M_1, M_2. In acest caz, tangentele în M_1 şi M_2 la cercul (O) determină prin intersecţia lor polul P, iar cercul (ω) este acela al punctelor de contact M_1 şi M_2. Aşa dar, în acest caz, dreapta Δ purtând coarda comună a cercurilor (O) şi (ω), ea este axul radical al acestor două cercuri.

b) Să presupunem acum cazul când dreapta (Δ) nu taie cercul (O). Fie I un punct oarecare al dreptei (Δ), p' şi p'' puterile acestui punct în raport cu cercurile (O) şi (ω). Avem imediat

$$p' - p'' = (\overline{IO}^2 - R^2) - (\overline{I\omega}^2 - \overline{O\omega}^2) = (\overline{IO}^2 - \overline{I\omega}^2) + (\overline{O\omega}^2 - R^2)$$

$$= (\overline{OM}^2 - \overline{\omega M}^2) + (\overline{O\omega}^2 - R^2) = \overline{O\omega}\,(\overline{OM} + \overline{M\omega})$$

$$+ \overline{O\omega}^2 - R^2) = \overline{O\omega}\,(2\,\overline{OM} - \overline{O\omega}) + (\overline{O\omega}^2 - R^2)$$

$$= 2\,\overline{O\omega} \cdot \overline{OM} - R^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OM} - R^2 = 0, \qquad (2)$$

de unde rezultă proprietatea enunţată mai sus.

2. In ambele cazuri de figură, din relaţia (1), observând că $\overline{OP} = 2\,\overline{O\omega}$, deducem relaţia

$$\overline{OM} \cdot \overline{O\omega} = \frac{R^2}{2}, \qquad (3)$$

deci *centrul* ω, al cercului (ω) definit mai sus, *este polul dreptei* (Δ) *în raport cu un cerc* (Γ) *concentric cu cercul* (O) *şi cu raza egală cu jumătatea laturii patratului înscris în cercul* (O),

$$\gamma = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

3. Fie acum un triunghiu $A_1\,A_2\,A_3$, oarecare, dat în planul cercului (O), iar $\overline{A_1A_1'}$, $\overline{A_2A_2'}$, $\overline{A_3A_3'}$ înălţimile acestui triunghiu, H_1 punctul de întâlnire al acestor înălţimi; ω', ω'', ω''' centrele cercurilor, care trec prin centrul O şi au respectiv cu cercul (O) ca axe radicale dreptele A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3'. După proprietatea precedentă dela punctul 2, centrele ω', ω'', ω''' sunt respectiv polurile dreptelor A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' în raport cu un cerc (Γ), concentric cu cercul (O) şi cu raza $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; dar înălţimile A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' fiind concurente în H_1, polurile lor ω', ω'', ω''' în raport cu cercul (Γ) se găsesc pe polara Δ_1, a punctului H_1 în raport cu cercul (Γ).

4. Să considerăm acum în planul cercului (O) un patrulater complect $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ în care A_5A_6 este a treia diagonală, având $A_5(A_2A_3, A_1A_4)$.

Considerând triunghiurile $A_5A_1A_2$, $A_5A_3A_4$, $A_6A_2A_3$, $A_6A_1A_4$ cu ortocentrele H_1, H_2, H_3, H_4 şi polarele acestor ortocentre $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ în raport cu cercul (Γ), concentric cu cercul (O) şi cu raza $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, rezultă, amintind proprietatea lui AUBERT, anume, că *ortocentrele celor patru triunghiuri, formate de patru drepte care se taie două câte două, sunt pe aceeaşi dreaptă*, şi după proprietăţile polarelor în raport cu un cerc, că, deoarece H_1, H_2, H_3, H_4 sunt pe aceeaşi dreaptă, polarele lor Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 trec prin acelaşi punct, polul dreptei H_1H_4.

Observare. Se vede că, deoarece proprietatea lui AUBERT este adevărată pentru un patrulater oarecare, condiţia dată de propunătorul problemei ca patrulaterul ABCD să fie inscriptibil *nu era necesară*, cu atât mai mult cu cât ea nici nu simplifică soluţia problemei.

Au rezolvat problema aşa cum a fost propusă, D-nii: M. L. RUSU, PAUL DRĂGHICESCU, MIRCEA D. POPA, ALEXANDRU I. ROHR.

O. N, Ţ.

PROBLEMA 5832. *Se dă o dreaptă* D *şi două puncte* A *şi* B *exterioare dreptei. Să se construiască pe dreapta* D *un punct* M *astfel ca bisectoarea unghiului format de dreptele* D *şi* AM *să treacă prin* B. *Discuţie.*

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţia I-a dată de D-nii: RADU P. VOINEA (student inginer, Bucureşti), MIRCEA C. MANOLACHE (student inginer, Bucureşti), EUGEN N. WEGENER (Bucureşti), MIHAI AL. LEON (clasa a VI-a liceul „A. Vlaicu", Bucureşti).

Se construeşte cercul cu centrul în B, tangent dreptei D. Tangentele duse din A la acest cerc întâlnesc dreapta D în două puncte M_1 şi M_2, care sunt soluţiile problemei. In adevăr M_1B este bisectoarea unghiului format de tangentele D şi M_1A.

Discuţie. Să notăm cu *d* distanţa dela punctul B la dreapta D.

I. *Punctele* A *şi* B *sunt de o parte şi alta a dreptei* D. Totdeauna sunt *două soluţii* distincte.

II. *Punctele* A *şi* B *sunt de aceeaşi parte a dreptei* D:

a) $\overline{BA} > d$ *două soluţii* distincte (A exterior cercului (B)).

b) $\overline{BA} = d$ *o singură soluţie* (soluţie dublă, A pe cerc).

c) A se află pe paralela la D, dusă la distanţa $2d$: *o singură soluţie* (unul din punctele M e la infinit).

d) $\overline{BA} < d$ *nicio soluţie* (A interior cercului ((B).

e) A se află pe cercul (B), iar $AB \perp D$: *nicio soluţie* (ambele puncte M sunt la infinit).

Notă. Soluţii asemănătoare, însă cu discuţia necompletă s'au primit dela D-nii: VASILE D. PĂLĂCEANU (liceul militar, Timişoara) şi MIRCEA I. PĂTRĂSCIOIU (clasa a VIII-a liceul Buzău).

Soluţia a II-a dată de D-nii: SLT. CONSTANTIN PANTELIMON (Ploeşti) şi AUREL H. CUBAT (bacalaureat Iaşi).

Cercul cu centrul în B, de rază $\overline{BA}$, taie dreapta D în punctele F şi G. Mediatoarele coardelor AF şi AG întâlnesc dreapta D în punctele M_1 şi M_2, care sunt soluţiile problemei. In adevăr:

a) Mediatoarea coardei AF trece prin centrul B al cercului;

b) Mediatoarea bazei AF a triunghiului AM_1F este şi bisectoarea unghiului opus AM_1F. Analog pentru M_2.

Discuţie. Dacă d e distanţa dela B la dreapta D, avem situaţiile:

I. *Punctele* A *şi* B *de o parte şi alta a dreptei* D: *două soluţii.*

II. *Punctele* A *şi* B *de aceeaşi parte a dreptei* D.

a) $\overline{BA} > d$ *două soluţii* (punctele F şi G distincte).

b) $\overline{BA} = d$ *o singură soluţie* (E şi F confundate).

c) A e pe paralela la D, la distanţa $2d$: *o singură soluţie* (H_2 la infinit).

d) $\overline{BA} < d$ *nicio soluţie* (nu există punctele E şi F).

e) $\overline{BA} = d$, iar $\overline{AB} \perp D$ *nicio soluţie.*

Soluţia a III-a dată de D-nii: P. P. DRĂGHICESCU şi SLT. M. AL. VASILESCU-ŞTABU.

Fie C punctul de intersecţie al dreptelor D şi AB, iar E conjugatul armonic al lui B faţă de A şi C. Cercul de diametru BE taie dreapta D în punctele căutate M_1 şi M_2. In adevăr, în fascicolul armonic M (ACBE) razele MB, ME sunt perpendiculare, unghiul lor fiind înscris într'un semicerc. Ele sunt atunci bisectoarele unghiului format de celelalte două raze.

Discuția. I. Când A și B sunt de o parte și alta a dreptei D avem *două soluții* distincte.

II. A *și* B *sunt de aceeași parte a dreptei* D.

Să ne închipuim că suntem în cazul limită când cercul de diametru BE e tangent dreptei D. Atunci evident că $\sphericalangle CMB = \sphericalangle MEB$ având aceeași măsură și deoarece MB e bisectoarea unghiului CMA rezultă $\sphericalangle BMA = \sphericalangle MEB$, ceea ce arată că în triunghiul dreptunghic BME, MA este înălțime, deci $BA \perp MA$. Dacă d este distanța dela B la dreapta D, avem $\overline{BA} = d$. Avem o singură soluție. De asemeni *avem o singură soluție* când B e mijlocul segmentului $\overline{CA}$, căci E este la infinit, iar cercul devine mediatoarea lui $\overline{CA}$. Punctul A este la distanța $2d$ de dreapta D.

Când $\overline{BA} > d$ avem *două soluții.* Când $\overline{BA} < d$ *nu putem avea soluții* căci ar însemna ca dintr'un punct al bisectoarei să putem duce o oblică față de latură, mai scurtă decât perpendiculara.

PROBLEMA 5865. *In triunghiul* ABC *fie* D *un punct pe latura* BC, E *un punct pe* AD. *Se proiectează* E *în* F *pe* AB, *în* G *pe* AC *și* A *se proiectează în* H *pe* BC.

Să se arate că avem relațiile:

1. $$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AE}}{\overline{EF}}$$

2. $$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{EG}}.$$

Dacă I *este punctul unde* AD *taie cercul circumscris, avem:*

3. $$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BI}}{\overline{CI}}.$$

4. *Cazuri particulare* (AD *bisectoare sau mediană în triunghiul* ABC).

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: CRISTU I. CANTUNIAR (liceul Titu Maiorescu, București); CONSTANTIN PANTELIMON (Sublocotenent Artileria antiaeriană, Ploești); P. P. DRĂGHICESCU (student-inginer);

TRAIAN V. MUSTĂCESCU (liceul Titu Maiorescu, Bucureşti); GEORGE M. NICOLAE (Colegiul Naţional Carol I, Craiova); MIRCEA P. PĂTRĂŞCIOIU (liceul Buzău); GHEORGHE GH. VRÂNCEANU (liceul militar Mihai Viteazul, Timişoara).

1. Fie M proiecţia lui D pe AB. Din triunghiurile asemenea ABH şi BMD scoatem

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{MD}}$$

pe de altă parte

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$$

de unde, prin eliminarea lui $\overline{MD}$, obţinem relaţia 1.

2. Avem analog şi

$$\frac{\overline{AC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AE}}{\overline{EG}}$$

de unde prin împărţire cu 1 obţinem relaţia 2.

3. Din triunghiurile asemenea ABD, CDI obţinem

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CI}} \quad ; \quad \text{analog} \quad \frac{\overline{DC}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BI}}$$

şi prin împărţire se obţine 3.

4. Dacă AD este bisectoare (EF=EG) relaţiile 2, 3 se reduc la relaţiile cunoscute

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad , \quad \overline{BI} = \overline{CI}.$$

Dacă AD este mediană (BD=CD) relaţiile 2, 3 devin

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{BI}}.$$

Alte soluţii date de D-nii: M. R. CONSTANTINESCU, ŞT. N. DAMIAN, SLT. I. D. DIACONESCU, P. P. DRĂGHICESCU, M. MANOLIU, E. MARINESCU, C. PANTELIMON, T. R. SANDU, E. N. WEGENER.

PROBLEMA 5937. *Să se demonstreze că patratele terminate în* $\overline{\text{m}369}$ *au ca rădăcină numerele:*

$$N = 5000 \cdot n + \varepsilon_1 (1500 \cdot m + 412 + \varepsilon_2 \cdot 1875)$$

în care n *este un întreg oarecare,* m *cifra miilor lui* N^2, *iar* ε_1 *şi* ε_2 *au valorile* ± 1.

I. V. MĂTIEŞ.

Soluţie. Patratele N^2 terminate în $\overline{m369}$ au ca rădăcină patrată numerele de forma:

$N_1 = 5000 \cdot n \pm (1500 \cdot m - 1463)$ şi $N_2 = 5000 \cdot n \pm (5000 \cdot m + 2287)$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ şi m cifra miilor lui N^2, conform celor stabilite de D-l I. V. MĂTIEŞ în articolul: *Patrate isofinale*, din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 397—413.

Observând că

$$+ 2287 = 412 + 1875 \quad \text{şi} \quad - 1463 = 412 - 1875,$$

expresiile lui N_1 şi N_2 le putem scrie sub forma unică:

$$N = 5000 \cdot n \pm (1500 \cdot m + 412 \pm 1875)$$

sau

$$N = 5000 \cdot n + \varepsilon_1 (1500 \cdot m + 412 + \varepsilon_2 \cdot 1875)$$

în care n este un întreg oarecare, m cifra miilor lui N^2 şi ε_1, $\varepsilon_2 = \pm 1$.

1°. *Notă.* Urmărind tabloul 4 din articolul citat, se observă că patratele terminate în $\overline{msz9}$, provin dela numere, ce se pot îngloba în următoarele două forme generale

$N_1 = 5009 \cdot n \pm (1500 \cdot m + 2a + 1)$ şi $N_2 = 5000 \cdot n \pm (1500 \cdot m + 2b - 1)$.

Observând că:

$$2a + 1 = a + b + (a - b + 1) \quad \text{şi} \quad 2b - 1 = a + b - (a - b + 1)$$

N_1 şi N_2 se pot scrie în expresia unică:

$$N = 5000 \cdot n \pm [1500 \cdot m + a + b \pm (a - b + 1)] \; ; \; N^2 = \overline{msz9}$$

unde $n = 0, 1, 2, \ldots$; m cifra miilor lui N^2, iar $2a + 1$, $2b - 1$ luând valorile trecute în tabloul 4, din articolul citat.

Analog mai stabilim că numerele:

$N_1 = 5000 \cdot n \pm (500 \cdot m + 2a + 1)$ şi $N_2 = 5000 \cdot n \pm (500 \cdot m + 2b - 1)$

au patratele terminate în $\overline{msz1}$ şi se înglobează sub forma generală unică

$$N = 5000 \cdot n \pm [500 \cdot m + a + b \pm (a - b + 1)] \; , \; N^2 \equiv \overline{msz1}.$$

La fel numerele:

$N = 1000 . n \pm (100 . m - 120 \pm 125)$ au N^2 terminat în $\overline{m025}$

$N = 1000 . n \pm (300 . m - 140 \pm 125)$ au N^2 terminat în $\overline{m225}$.

2°. Cazul particular din enunțul problemei a fost rezolvat de D-nii: MIHAI SP. MANOLIU (liceul „Gh. Codreanu", Bârlad), ILIE N. CONSTANTINESCU (liceul „N. Bălcescu", Brăila), GH. D. BRAȘOVEANU (Colegiul Național „Carol I", Craiova) și E. N. WEGENER, (student inginer, București).

I. V. M.

PROBLEMA 5981. *Un detașament militar are de trecut peste un fluviu un număr, mai mic ca 300, de tancuri. El are la dispoziție trei porturi* A, B, C, *în fiecare din care poate acosta un singur vas. Vasul din* A *poate trece dintr'odată 7 tancuri, cel din* B *câte 8 și cel din* C *câte 10. Încărcarea, traversarea fluviului și descărcarea pe celălalt țărm durează pentru fiecare vas 5 ore; iar înapoierea vasului descărcat 1 oră. Comandantul detașamentului ordonă să se facă depozite egale de tancuri în* A, B *și* C. *După aceea, mijloacele de transport terestru pleacă pentru alte misiuni, așa că nu se mai poate transporta nimic pe uscat între* A, B *și* C. *La trecerea fluviului se constată că ultimul transport din* A *a luat numai 5 tancuri, ultimul transport din* B *numai 3, iar ultimul transport din* C *numai 5.*

Câte tancuri a avut de transportat detașamentul?

In câte ore s'a efectuat transportul peste fluviu în felul cum a depozitat comandantul tancurile?

Nu s'ar fi putut distribui tancurile altfel între A, B *și* C *astfel ca să necesiteze un număr minim de treceri ale vaselor și deci să câștige maximul de timp pentru traversare?*

P. SERGESCU.

Conform enunțului, numărul tancurilor e multiplu de 3, căci se fac trei depozite egale în A, B și C. Fie 3N acest număr. In fiecare port se depozitează câte N tancuri. $N < 100$, căci prin ipoteză $3N < 300$. Deoarece ultimul transport din A a luat numai 5 tancuri, pe când cele precedente câte 7, rezultă că

$$N = \text{Mult. } 7 + 5.$$

In acelaşi fel:

$$N = \text{Mult. } 8 + 3$$

$$N = \text{Mult. } 10 + 5.$$

Din prima şi a treia relaţie se deduce

$$N - 5 = \text{Mult. } 7 = \text{Mult. } 10 = \text{Mult. } 70$$

$$N = 70q + 5.$$

Comparând cu relaţia a doua, avem:

$$8p + 3 = 70q + 5$$

$$4p - 35q = 1$$

p şi q se obţin uşor conform teoriei celui mai mare comun divizor. Avem soluţia particulară în întregi

$$p = 9 \quad , \quad q = 1$$

şi în general

$$p = 9 + 35k \quad , \quad q = 1 + 4k.$$

Rezultă

$$N = 75 + 280k.$$

Cum $N = 100$, trebue $k = 0$ şi deci *numărul de tancuri ce are de transportat detaşamentul este* $3N = 3 \times 75 = 225$.

Vasul din A a făcut 11 transporturi, 10 complete (70 de tancuri) şi unul necomplet (5 tancuri). Vasul din B a făcut 10 transporturi, iar vasul din C a făcut 8 transporturi. Deci, detaşamentul a trebuit să aştepte până s'au efectuat toate cele 11 transporturi ale vasului din A (în care timp vasele din B şi C terminaseră misiunea). Până când s'a făcut deci trecerea tuturor tancurilor s'au făcut 10 treceri dus şi întors, adică $10 \times 6 = 60$ de ore, plus un transport dus şi descărcat, 5 ore, căci înapoierea ultimă a vasului din A nu mai interesează detaşamentul ca atare, în urma ordinului comandantului, *trecerea fluviului a ţinut 65 de ore.*

E însă evident că s'a pierdut mult timp. Pe de o parte, ultimele transporturi nu erau complete, pe de altă parte vasul din B a stat neutilizat pe când cel din A făcea ultimul transport, iar vasul din C a rămas nefolosit timp de trei transporturi. Pentru a câştiga timp, era natural ca depozitele de tancuri din A, B şi C

să fie proporţionale cu puterea de transport corespunzătoare a vaselor din A, B şi C, aşa ca cele trei vase să facă *acelaşi* număr de transporturi (dacă rezultatul e *exact*) sau cel mult să se piardă un singur transport (dacă împărţirea în părţi proporţionale nu dă rezultate întregi).

Insemnând deci cu a, b, c depozitele pe care comandantul ar trebui să le facă în A, B, C pentru a realiza economia maximă de timp, trebue să avem:

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{8} = \frac{c}{10} = \frac{225}{25} = 9$$

$$a = 63 \quad , \quad b = 72 \quad , \quad c = 90.$$

Dacă comandantul ar fi adus în A, B, C respectiv 63, 72 şi 90 de tancuri, vasele le-ar fi transportat pe toate în 9 transporturi complete. Acestea cer $8 \times 6 + 5 = 53$ ore. Deci s'ar face o economie de $65 - 53 = 12$ ore, care e apreciabilă.

Observare. Problema *timpului minim* de transport al tancurilor se rezolvă în mod analog şi în cazul când rezultatul împărţirii în părţi proporţionale *nu e întreg*. Dar atunci numărul de transporturi este cel mai mic întreg superior câtului dintre 3N şi suma tancurilor transportate de vasele din A, B, C într'un singur transport.

Pentru generalitate, fie 3N tancuri, vasul din A transportă dintr'odată α tancuri, cel din B câte β şi cel din C câte γ. Ca să avem minimul de transporturi, trebue să repartizăm greutatea depozitelor după puterile vaselor, adică să facem împărţirea în părţi proporţionale:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{3N}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Termenii ultimului raport sunt cunoscuţi. Dacă raportul e întreg, soluţia care dă minimul de transporturi e evident:

$$a = \frac{3N\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \quad , \quad b = \frac{3N\beta}{\alpha+\beta+\gamma} \quad , \quad c = \frac{3N\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Dacă însă 3N nu se împarte exact prin $(\alpha+\beta+\gamma)$, fie f câtul întreg prin lipsă, şi g restul.

Avem:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = f + \frac{g}{\alpha+\beta+\gamma}$$

unde $g < \alpha + \beta + \gamma$. Distribuind în A, B, C respectiv câte $f\alpha$, $f\beta$, $f\gamma$ tancuri, ele pot fi transportate în f transporturi simultane. Rămâne de repartizat încă restul de g tancuri, între A, B, C. Ele vor necesita un al $(f+1)$-lea transport. Deci se fac $f+1$ transporturi, în cel mai bun caz. Trebue însă ca cele g tancuri să fie distribuite între A, B şi C astfel ca să nu ceară mai mult decât *un* transport, lucru care se poate face în multe feluri. De pildă, să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Atunci, dacă $g \leqslant \alpha$, se pot depozita în A un număr de $f\alpha + g$ tancuri, al $(f+1)$-lea transport îl face numai vasul din A. Dacă însă $\alpha \leqslant g \leqslant \alpha + \beta$, atunci repartizăm cele g tancuri între A şi B respectiv câte a', b', aşa ca $a' \leqslant \alpha$ şi $b' \leqslant \beta$ şi atunci al $(f+1)$-lea transport este făcut de vasele din A şi B. In fine, dacă $\alpha + \beta \leqslant g < \alpha + \beta + \gamma$, cele g tancuri trebuesc repartizate între A, B şi C, respectiv câte $a' \leqslant \alpha$, $b' \leqslant \beta$, $c' \leqslant \gamma$, iar al $(f+1)$-lea transport va fi făcut de toate vasele din A, B şi C, din care cel puţin unul are încărcătura necompletă, căci $g < \alpha + \beta + \gamma$.

Soluţii analoage au fost primite de la D-nii: A. BARBU (Caracal), MIHAI D. CONSTANTINESCU (Ploeşti), C. C. DIACONU (Liceul Aurel Vlaicu), G. A. GRIGORE, MIRCEA I. PĂTRĂŞCIOIU, GH. GH. VRÂNCEANU, GH. BRAŞOVEANU, AL. A. TEODORESCU (Liceul Militar, Timişoara).

Notă. S'au mai primit soluţii bune dela D-nii: V. C. BĂRBULESCU, M. A. LEON, M. V. SOARE, AL. AL. TIMOTIN, M. D. CÂRSTEA (Liceul Militar Timişoara) şi E. N. WEGENER (Bucureşti).

EXERCIŢII

21. *Dacă $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$, sunt numere oarecare, să se arate că expresia:*

$$E = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n)^2 + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2)$$

este un patrat perfect.

T. STOICESCU.

R. Notăm:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = N$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 \ldots + x_2x_n + x_3x_4 + x_3x_5 + \ldots + x_3x_n + \ldots + x_{n-1}x_n = M.$$

Insă:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2$$
$$+2(x_1x_2+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_2x_n+x_{n-1}x_n)=N+2M.$$

Expresia din enunț poate deci fi scrisă:

$$E=M^2+(N+2M)N=(N+M)^2.$$

Prin urmare:

$$E=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2+x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3$$
$$+x_2x_4+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n)^2.$$

22. *Să se arate că*

$$\alpha=\frac{\Sigma a}{\Sigma\sin A},\quad \beta=\Sigma r_a-R\Sigma\cos A,\quad \gamma=\frac{-3r+\Sigma r_a}{\Sigma\sin^2\frac{A}{2}}$$

unde a, A, R, r, r_a *sunt notațiile obișnuite dintr'un triunghiu, sunt în progresie aritmetică cu rația* R.

M. R. Constantinescu.

R. Avem succesiv:

$$\alpha=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\Sigma a}{\Sigma\sin A}=2R$$

$$1+\cos B+\cos C-\cos A=\frac{r_a}{R}\text{ etc.}\quad\therefore\quad\Sigma r_a=R(3+\Sigma\cos A)$$

şi deci

$$\beta=\Sigma r_a-R\Sigma\cos A=3R$$

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{r_a-r}{4R}\quad\therefore\quad 4R\Sigma\sin^2\frac{A}{2}=\Sigma r_a-3r\quad\therefore\quad\gamma=\frac{\Sigma r_a-3r}{\Sigma\sin^2\frac{A}{2}}=4R.$$

23. *In orice triunghiu avem relația:*

$$\Sigma a\operatorname{cotg}A+\Sigma r_a=3(2R+r).$$

I. A. Barbu.

R. Avem:

$$\Sigma a\operatorname{cotg}A=\Sigma\frac{a}{\sin A}\cos A=2R\Sigma\cos A=2(R+r)$$

$$\Sigma r_a=p\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{2}=4R+r$$

de unde se deduce relația de demonstrat.

24. *Intre elementele unui triunghiu avem :*

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 - pS = (4R + r)\left(\Sigma \frac{S^2}{(p-a)^2} - p^2\right).$$

CĂP. E. ST. IACOB.

R. Se pleacă dela identitatea :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

în care se face

$$x = r_a \quad , \quad y = r_b \quad , \quad z = r_c$$

şi apoi se ţine seama de

$$r_a r_b r_c = pS \quad , \quad \Sigma r_a = 4R + r \quad , \quad \Sigma r_a r_b = p^2 \quad r_a = \frac{S}{p-a} \, , \ldots$$

25. *Să se demonstreze că :*

$$\sum_1^n \frac{(-1)^{i+1} i}{i+1} C_n^i = \frac{1}{i+1} \; ^{1)}.$$

E. N. WEGENER.

R. Derivând ambii membri ai identităţii :

$$1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n = (1-x)^n$$

se ajunge, după înmulţirea cu xdx, la

$$-C_n^1 x dx + 2C_n^2 x^2 dx - 3C_n^3 x^3 dx + \ldots + (-1)^n n C_n^n x^n dx = -nx(1-x)^{n-1} dx.$$

Integrăm între limitele $0 - x$ şi găsim :

$$-\frac{x^2}{2} C_n^1 + 2\frac{x^3}{3} C_n^2 + \ldots + (-1)^n x C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x(1-x)^n + \frac{(1-x)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

In această egalitate facem $x = 1$ şi după ce înmulţim cu -1 obţinem rezultatul din enunţ.

26. *Intr'un triunghiu oarecare avem relaţiile :*

1°. $$\frac{abc}{\Sigma a h_a} + \Sigma a \operatorname{cotg} A = \frac{2(7R + 3r)}{3}$$

2°. $$\frac{R + r}{\Sigma a \operatorname{cotg} A} + \Sigma a h_a = \frac{R + 3abc}{2R}.$$

I. A. BARBU.

R. 1°. Se ţine seamă de

$$\frac{abc}{\Sigma a h_a} = \frac{2abc}{3S} = \frac{8R}{3}$$

$$\Sigma a \operatorname{cotg} A = 2(R + r).$$

2°. Rezultă imediat din cele dela 1°.

---

1) A se vedea exerciţiul analog dela pag. 762, *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX.

PROBLEME PROPUSE

6083. Cercurile (O) şi (O′) sunt tangente exterior în ω. Tangentele la (O) şi (O′) paralele cu OO′ şi de aceeaşi parte cu OO′ întâlnesc tangenta comună în ω respectiv în A şi A′. Să se demonstreze că tangentele din A şi A′ la (O′) şi (O) sunt paralele între ele. Să se examineze şi cazul când (O), (O′) sunt tangente interior.

P. P. DRĂGHICESCU.

6084. Să se găsească cifrele a, b, c, d cu care să se formeze numere de 1, de 2 şi de 3 cifre, cari să satisfacă simultan următoarele operaţiuni aritmetice indicate prin semne:

$$\begin{array}{rcl} abc & : & cd = b \\ - & & - \quad + \\ aba & + & aa = adc \\ \times & & - \quad + \\ cd & - & ab = aa \\ - & & + \quad - \\ \underline{ab} & \times & \underline{d} = \underline{aac} \\ aa & \times & d = dd \end{array}$$

G-L GH. BUICLIU.

6085. Se notează cu $\varphi_a(n)$ numărul numerelor prime cu n din şirul 1, 2, 3, ..., a al primelor a numere naturale. Să se arate că dacă n are trei factori primi diferiţi, avem

$$-4 \leqq \varphi_{2a}(n) - 2\varphi_a(n) \leqq 3,$$

unde ambele egalităţi sunt efectiv posibile.

Să se examineze valorile pe care le poate lua diferenţa $\varphi_{2a}(n) - 2\varphi_a(n)$ şi să se studieze în special cazurile particulare $n = 2.3.5$ şi $n = 3.5.7$.

TIBERIU POPOVICIU.

6086. Fie ecuaţia

$$x^2 + px + q = 0$$

de rădăcini x_1, x_2. Să se formeze ecuaţia de rădăcini

$$X_1 = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \quad X_2 = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}.$$

Să se caute relaţia dintre realizanţii lor.

N. N. MIHĂILEANU.

6087. Să dă ecuaţia

$$x^3 + \alpha x^2 - (3\alpha - 1)x + 3\alpha = 0.$$

Să se determine α şi să se rezolve ecuaţia ştiind că rădăcinile ei satisfac relaţia

$$x_1 + x_3 = x_2^3.$$

IONEL I. STAMATE.

6088. Să se arată că

$$\sum_{i=1}^{i=n} \operatorname{tg} 2^{i-1} x + \sum_{i=1}^{i=n} \operatorname{cotg} 2^i x = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\sin 2^i x} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} 2^n x.$$

MIHAI R. CONSTANTINESCU.

6089. Pe o parabolă oarecare se iau s puncte $M_1, M_2, \ldots, M_S$, ale căror proiecţii ortogonale pe tangenta în vârf formează o serie de ordonate în progresie aritmetică. Să se arate că:

Dacă s este par şi egal cu $2q$, coardele M_1M_S, $M_2M_{S-1}, \ldots$, $M_q M_{q+1}$ sunt paralele.

Dacă s e impar şi egal cu $2q+1$, coardele M_1M_S, $M_2M_{S-1}, \ldots$, $M_q M_{q+2}$ sunt paralele cu tangenta în M_{q+1} la parabolă.

P. SERGESCU.

6090. 1°. Utilizându-se desvoltarea în serie MACLAURIN a funcţiunii $\sin x$, să se calculeze cu trei zecimale exacte valoarea lui $\sin 30^0$.

2°. Se dau valorile lui $\sin 30^0$ şi $\cos 30^0$. Utilizându-se desvoltarea în serie TAYLOR a funcţiunii $\sin(a+h)$, să se calculeze cu trei zecimale exacte valoarea lui $\sin 31^0$.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6091. O funcţie de două variabile, $\varphi(x, y)$, poate fi pusă cel mult într'un singur fel, sub forma

$$\varphi(x, y) = \frac{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)}{\varphi(x)},$$

afară de cazul când se reduce la o funcţie numai de y.

M. GHERMĂNESCU.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Braşoveanu D. Gh. (5838); *Cârje I.* (6046); *Cârstea D. M.* (5981, 6039); *Constantinescu N. Ilie* (5999, 6043, 47, 66); *Costea D. Gh.* (6043, 47); *Diaconu C. C.* (6029, 39, 47, 53, 66); *Filimon I.* (5926, 6002, 47); *Grigoraş Gh.* (6043, 47); *Mărăndici S. Al.* (6047); *Marinescu E.* (3736, 4468, 772, 5072, 868, 911, 12, 13, 15, 16, 41, 42, 54, 56, 60, 73, 6002, 05, 29, 33, 47, P); *Popescu A. Stelian* (6047); *Sintescu V. Mihai* (6045); *Soare V. Mircea* (5813); *Tănăsescu S. C.* (3635, 6013, 15, 43, 45, 47); *Vilski Cazimir* (6047); *Vlad M.* (6046, 50); *Vrânceanu Gh. Gh.* (5475, 583, 93, 632, 922, 26, 6036, 37, 39, 47); *Wegener N. E.* (3640, 939, 4041, 5937, 81, 6043, 47).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XVI şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 400

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică,* Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian.** . . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 600

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 30.246.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 8. — APRILIE 1945

LICEUL „GH. LAZĂR" - SIBIU
Biblioteca Profesorilor
No. .....

SUMARUL

1. Rezolvarea în numere întregi a ecuației omogene de gradul al doilea (urmare și sfârșit) . . . . . *N. Georgescu Roegen.*
2. Premiul „Ing, Alexandru Roșu" . . . *Comisiunea pentru premii.*
3. Note matematice: 24.
4. Chestiuni de examen.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 335.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 4283, 5049, 5128, 5588.
9. Exerciții: 26—27.
10. Probleme propuse: 6092 — 6100.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1945

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici, Directorul Statisticei Financiare; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela «*Gazeta Matematică*» în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6006, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133.

La «*Gazeta Matematică*» se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 400

REZOLVAREA IN NUMERE INTREGI A ECUAȚIEI OMOGENE DE GRADUL AL DOILEA

(Urmare dela pag. 278)

1°. *Problema 3902* [1]). *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

(18) $$x^2 = xy + xz + zx.$$

Impărțind cu x^2, avem

$$1 = Y + Z + YZ$$

care se verifică pentru

$$Y = 0 \quad , \quad Z = 1.$$

Să punem

$$Y = \beta\lambda \quad , \quad Z = 1 + \gamma\lambda$$

avem

$$2\beta + \gamma + \lambda\alpha\beta = 0.$$

Nu putem avea soluțiuni suplimentare. Soluția generală este dată de

$$x = \pm\frac{\beta\gamma}{\Delta} \quad y = \mp\frac{\beta(2\beta+\gamma)}{\Delta} \quad z = \mp\frac{\gamma(\beta+\gamma)}{\Delta}.$$

Se vede ușor că $\Delta = 1$, deci soluțiile primitive sunt:

$$x = \pm\beta\gamma \quad y = \mp\beta(2\beta+\gamma) \quad z = \mp\gamma(\beta+\gamma).$$

2°. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

(19) $$px^2 + qy^2 = (p+q)z^2.$$

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $D(p, q) = 1$. Soluția evidentă $x = y = z$ ne conduce, ca mai sus, la

$$x = \pm\frac{1}{\Delta}(-p\alpha^2 - 2p\alpha\beta + q\beta^2) = \pm\frac{1}{\Delta}[-p(\alpha+\beta)^2 + \beta^2(p+q)]$$

(20) $$y = \pm\frac{1}{\Delta}(p\alpha^2 - 2q\alpha\beta - q\beta^2) = \pm\frac{1}{\Delta}[-q(\alpha+\beta)^2 + \alpha^2(p+q)]$$

$$z = \pm\frac{1}{\Delta}(p\alpha^2 + q\beta^2).$$

---

1) A se vedea soluția dată în „G. M.", Vol. XLVIII, pag. 561.

Deoarece $x+y$ trebue să fie un întreg, Δ va divide pe

$$2\alpha\beta(p+q).$$

Orice factor comun al lui α şi Δ, trebuind să dividă şi pe $p\alpha^2+q\beta^2$, trebue să dividă şi pe q. Deci

(21) $$\Delta = k\,D(\alpha, q).$$

La fel

(22) $$\Delta = k'D(\beta, p).$$

Divizorii lui $p+q$, fiind primi cu p şi q, din (20) deducem că orice divizor comun al lui Δ şi $p+q$ trebue să dividă şi pe $(\alpha+\beta)^2$. Să punem

$$D[(\alpha+\beta)^2, p+q] = u^2v$$

unde v n'are decât factori primi simpli. Vom avea

(23) $$\alpha+\beta = uvw \quad p+q = u^2vt \quad D(uw, t)=1.$$

Cu aceste notaţiuni

$$p\alpha^2+q\beta^2 = uv(ut\alpha^2 - 2qw\alpha + quvw^2).$$

Fie

$$s = D(2w, u) \quad , \quad 2w = w_1s \quad , \quad u = us.$$

Atunci

$$p\alpha^2+q\beta^2 = M(u_1vs^2) \quad , \quad \alpha+\beta = \frac{u_1vw_1s^2}{2} \quad , \quad p+q = u_1^2vts^2$$

şi

$$D(\alpha+\beta, p+q) = u_1vs^2 \quad \text{dacă } w_1 \text{ este par}$$

$$D(\alpha+\beta, p+q) = \frac{u_1vs^2}{2} \quad \text{dacă } w_1 \text{ este impar}$$

In orice caz, deducem

(24) $$\Delta = k''D(\alpha+\beta, p+q).$$

Ţinând seamă că $D(\alpha, q)$, $D(\beta, p)$, $D(\alpha+\beta, p+q)$ sunt primi doi câte doi, şi că Δ nu poate avea înafară de factorii lui α, β, $p+q$, decât pe 2, deducem din (21), (22) şi (24):

$$\Delta = 2^\varepsilon D(\alpha, q)\, D(\beta, p)\, D(\alpha+\beta, p+q) \qquad \varepsilon \leqslant 1.$$

Prin urmare soluția generală a ecuației (19) este [1])

$$x = \pm \frac{-p(\alpha+\beta)^2 + \beta^2(p+q)}{2^\varepsilon D(\alpha, q)\ D(\beta, p)\ D(\alpha+\beta,\ p+q)}$$

$$y = \pm \frac{-q(\alpha+\beta)^2 + \alpha^2(p+q)}{2^\varepsilon D(\alpha, q)\ D(\beta, p)\ D(\alpha+\beta,\ p+q)}$$

$$z = \pm \frac{p\alpha^2 + q\beta^2}{2^\varepsilon D(\alpha, q)\ D(\beta, p)\ D(\alpha+\beta,\ p+q)}.$$

3°. *Să se rezolve în numere întregi ecuația*

(25) $$x^2 = y^2 + z^2 + w^2.$$

Pornind dela soluția $x = y = 1$, $z = w = 0$, obținem:

(26) $$x = \pm \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\Delta} \quad y = \pm \frac{-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\Delta}$$

$$z = \pm \frac{2\alpha\beta}{\Delta} \quad w = \pm \frac{2\gamma}{\Delta}.$$

Punând $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ obținem soluția (5) care nu este cuprinsă în sistemul (6).

Din (26) deducem:

(27) $$\beta^2+\gamma^2 = k_1\Delta_1 \quad \alpha^2 = k_2\Delta_1 \quad \alpha\beta = k_3\Delta_1 \quad \alpha\gamma = k_4\Delta_1$$

unde am pus $\Delta = 2^\varepsilon\Delta_1$, iar ε este egal cu 1 sau 0 după cum $\beta^2+\gamma^2$ și α^2 sunt ambii impari sau nu.

Din $D(\alpha, \beta, \gamma) = 1$, rezultă $D(\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\gamma) = \alpha$. Ținând seamă de (27), deducem că Δ_1 divide pe α, deci

(28) $$\alpha = k\Delta_1 \quad \Delta_1 = D(\alpha, \beta^2+\gamma^2)$$

Fie acum $\delta = D(\beta, \gamma)$, $\beta = b\delta$, $\gamma = c\delta$. Vom avea

(29) $$\delta^2(b^2+c^2) = k_1\Delta_1$$

și, deoarece δ și Δ_1 sunt primi între ei

(30) $$b^2 + c^2 = k'\Delta_1$$

cu condiția ca $D(k, k') = 1$.

---

1) A se compara cu formulele găsite de D-l I. B. Florescu (G. M., Vol. XXXVI, p. 250), care cuprinde trei parametri legați printr'o relație. In general, soluțiile de acest fel conduc mai greu la găsirea soluțiilor numerice în chip sistematic.

După o cunoscută teoremă din teoria numerelor orice divizor al unei sume de două patrate, prime între ele ele, nu poate fi decât tot o sumă de două patrate. Descompunând în factori primi, vom avea aşa dar:

$$(31)\quad \begin{aligned} k' &= (s_1^2+t_1^2)\,(s_2^2+t_2^2)\ldots(s_m^2+t_m^2) \quad s_k \geqslant t_k \\ \Delta_1 &= (u_1^2+v_1^2)\,(u_2^2+v_2^2)\ldots(u_n^2+v_n^2) \quad u_n \geqslant v_n \end{aligned}$$

O altă teoremă ne spune că dacă un număr prim se descompune într'o sumă de două patrate, s^2+t^2, această descompunere este unică. In acest caz numerele $s+it$, $s-it$ nu se pot divide prin $s'+it'$, unde s', t' sunt întregi şi $s' \geqslant |t'|$. Face excepţie $1+i$ care se divide cu $1-i$, şi invers [1])

Numerele $b+ic$, $b-ic$, $b \geqslant c$ nu vor putea avea alţi divizori comuni decât pe cei cari divid pe $2b$ şi $2ic$. Ori b şi c fiind primi între ei, $b+ic$, $b-ic$ nu pot avea alţi divizori comuni decât pe cei ai lui $2 = (1+i)\,(1-i)$. Pe de altă parte, b^2+c^2 nu se poate divide cu 4, deci în factorii săi, $1+i$, $1-i$ nu pot apare decât cel mult câte odată.

Notând cu

$$s_k + it_k = \rho_k e^{i\theta k} \quad , \quad u_k + iv_k = \sigma_k e^{i\varphi k}$$

din (30) şi (31) deducem:

$$b+ic = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n e^{i(\Sigma \pm \theta_k + \Sigma \pm \varphi_k)}$$

deci

$$(32)\quad \begin{aligned} b &= \rho_1 \ldots \rho_m \sigma_1 \ldots \sigma_n \cos(\Theta+\Phi) \\ c &= \rho_1 \ldots \rho_m \sigma_1 \ldots \sigma_n \sin(\Theta+\Phi) \end{aligned}$$

unde

$$\Theta = \pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \ldots \pm \theta_m \quad , \quad \Phi = \pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \ldots \pm \varphi_n .$$

Să punem:

$$(33)\quad \begin{aligned} \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m \cos\Theta &= M \quad ; \quad \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m \sin\Theta = N \\ \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \cos\Phi &= P \quad ; \quad \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \sin\Phi = Q. \end{aligned}$$

---

1) A se vedea E. CAHEN, *Théorie des nombres*, Paris, Hermann, 1924, Vol. II.

Se constată uşor că M, N, P, Q sunt numere întregi. Din (32) deducem:

$$b = MP - NQ \quad ; \quad c = MQ + NP$$

şi cum

$$s_k^2 + t_k^2 = \rho_k^2 \quad ; \quad u_k^2 + v_k^2 = \sigma_k^2$$

obţinem

$$k' = M^2 + N^2 \quad ; \quad \Delta_1 = P^2 + Q^2.$$

Deci:

$$\alpha = k(P^2+Q^2) \quad ; \quad \beta = \delta(MP - NQ) \quad ; \quad \gamma = \delta(MQ+NP)$$

de unde

$$(34) \quad \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2^\varepsilon}[k^2(P^2+Q^2) + \delta^2(M^2 + N^2)] \\ y = \pm \frac{1}{2^\varepsilon}[-k^2(P^2+Q^2) + \delta^2(M^2+N^2)] \\ z = \pm \frac{1}{2^\varepsilon}.2k\delta(MP - NQ)] \\ w = \pm \frac{1}{2^\varepsilon}.2k\delta(MQ + NP)] \end{cases}$$

cu condiţia ca

$$D\,\delta,\, k(P^2+Q^2)] = 1 \quad ; \quad D(MP - NQ,\ MQ + NP) = 1.$$

Este clar că sistemul (34) este echivalent cu (26) şi cu

$$x = \pm \frac{1}{\Delta}(A^2+B^2+C^2+D^2) \quad ; \quad y = \pm \frac{1}{\Delta}(A^2+B^2-C^2-D^2)$$

$$z = \pm \frac{1}{\Delta}.2(AC + BD) \quad ; \quad w = \pm \frac{1}{\Delta}.2(AD + BC)$$

$$D(A, B, C, D) = 1.$$

Am obţinut astfel forma corectă a sistemului găsit foarte ingenios de D-l E. ŞTEFĂNESCU (Relaţiile 19, Vol. XXXII, p. 250).

Consecinţă. Cum orice număr impar poate fi egal cu o sumă de patrate pozitive, înseamnă că *orice patrat impar se poate descompune într'o sumă de trei patrate sau de două patrate.* (Propoziţie găsită de CATALAN. A se vedea C. A. LAISANT, *Recueil de problèmes de mathématiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1895, p. 165).

4°. O alegere potrivită a soluției particulare dela care pornim poate să ne fie de mult folos în problemele speciale.

Să considerăm ecuația:

$$(35) \qquad p^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2.$$

Pornind dela soluția $p=1$, $X = Y = Z = W = -\frac{1}{2}$, obținem:

$$(36) \quad X = p\left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha\Sigma\alpha}{\Sigma\alpha^2}\right), \quad Y = p\left(-\frac{1}{2} + \frac{\beta\Sigma\alpha}{\Sigma\alpha^2}\right),$$

$$Z = p\left(-\frac{1}{2} + \frac{\gamma\Sigma\alpha}{\Sigma\alpha^2}\right), \quad W = p\left(-\frac{1}{2} + \frac{\delta\Sigma\alpha}{\Sigma\alpha^2}\right)$$

$$\therefore \qquad 2p + X + Y + Z + W = p.\frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

Să presupunem că p este o sumă de patru patrate $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Dacă p este par atunci, punând $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $\delta = d$, numerele date de (36) sunt întregi iar:

$$(37) \qquad 2p + X + Y + Z + W = (\Sigma a)^2.$$

Dacă p este impar, după identitatea lui EULER avem

$$4\Sigma a^2 = (-a + b + c + d)^2 + (a - b + c + d)^2$$
$$+ (a + b - c + d)^2 + (a + b + c - d)^2$$

și punând $\alpha = -a + b + c + d$, $\beta = a - b + c + d, \ldots$ numerele X, Y, Z, W sunt întregi iar

$$(38) \qquad 2p + X + Y + Z + W = (\Sigma a)^2.$$

Deci *numărul* p *fiind dat, dacă se descompune într'o sumă de patru patrate, se poate găsi cel puțin o soluție a ecuației* (35) *astfel ca* $2p + X + Y + Z + W$ *să fie un patrat* (v. LAISANT, op. cit., p. 165).

5°. *Să se rezolve sistemul:*

$$(39) \quad p = X + Y + Z + W \ ; \ p^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2.$$

Eliminând pe p avem

$$(40) \qquad \Sigma \times X = 0.$$

Pornind dela soluţia $Y = Z = W = 0$, obţinem :

$$(41)\quad X = -2p\frac{\Sigma\alpha\beta}{\Sigma(\alpha+\beta)^2},\quad Y = 2p\frac{\alpha\Sigma\alpha}{\Sigma(\alpha+\beta)^2},$$

$$Z = 2p.\frac{\beta\Sigma\alpha}{\Sigma(\alpha+\beta)^2},\quad W = 2p.\frac{\gamma\Sigma\alpha}{\Sigma(\alpha+\beta)^2}.$$

Ecuaţia (40) se verifică şi pentru valorile $X=1$, $Y=Z=W=-1$, ceea ce ne permite să obţinem o nouă formă pentru soluţia generală a sistemului (39) :

$$(42)\quad X=p\frac{\Sigma\alpha\beta}{\Sigma\alpha^2},\quad Y=p\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{\Sigma\alpha^2},\quad Z=p\frac{\beta^2-\gamma\alpha}{\Sigma\alpha^2},\quad W=p\frac{\gamma^2-\beta\alpha}{\Sigma\alpha^2}.$$

Fiecare formă poate servi la atingerea unor rezultate diferite.

a) Din (41) deducem

$$Y+Z+W = 2p.\frac{(\Sigma\alpha)^2}{\Sigma(\alpha+\beta)^2}.$$

Dacă p este impar, $2p = 4p'+2$. Deci $2p$ se poate descompune într'o sumă de trei patrate $a^2+b^2+c^2$ (GAUSS, *Recherches Arithmétiques*, Paris, 1807, p. 343). Cum $a+b+c = 2q$, putem pune $\beta+\gamma=a$, $\gamma+\alpha=b$. $\alpha+\beta=c$ de unde $\alpha+\beta+\gamma=q$ şi

$$Y+Z+W = q^2.$$

Prin urmare, *dându-se* p *impar, printre soluţiile sistemului* (39) *există cel puţin una pentru care* $Y+Z+W$ *este un patrat* (v. LAISANT, p. 166).

b) Din (42) deducem :

$$3X+Y+Z+W = p.\frac{(\Sigma\alpha)^2}{\Sigma\alpha^2}.$$

De aci deducem uşor :

Dacă p *se descompune într'o sumă de trei patrate, printre soluţiunile sistemului* (39) *există cel puţin o soluţie pentru care* $3X+Y+Z+W$ *este un patrat* (LAISANT, p. 166).

N. GEORGESCU ROEGEN.

PREMIUL „ING. ALEXANDRU ROȘU“

Subsemnații, membri în Comisiunea pentru decernarea premiului « ING. ALEXANDRU ROȘU », cercetând volumul XLIX al *Gazetei Matematice*, pentru alegerea celui mai harnic corespondent al *Gazetei*, elev de liceu, am constatat următoarele :

Discontinuitatea semnalată în raportul din anul trecut al acestui premiu cu privire la hărnicia elevilor de liceu, corespondenți ai *Gazetei Matematice* se repetă și anul acesta.

Deși oarecum justificată de evenimentele ce ne-au încercat, lipsa de hărnicie a corespondenților începe oarecum să ne îngrijoreze.

Așteptându-ne ca lunga vacanță școlară să constitue pentru elevi un bun prilej de activitate la *Gazeta Matematică*, constatăm cu părere de rău că ne-am înșelat.

Activitatea elevilor de liceu este încă în eclipsă.

Așa se explică de ce nu găsim în volumul cercetat decât 20 de probleme rezolvate de către elevii de liceu, în fruntea cărora figurează D-l VASILE D. PĂLĂCEANU, elev clasa a VIII-a la liceul Militar „Mihai Viteazul“ din Târgul Mureș, azi provizoriu la Timișoara.

De asemenea D-l VASILE D. PĂLĂCEANU figurează pe copertele volumului XLIX cu un număr de 37 probleme rezolvate trimise spre publicare.

Dintre problemele rezolvate de D-l VASILE D. PĂLĂCEANU merită a fi menționate soluțiunile date problemelor 5580, 5630 și 5667, la ultima D-l PĂLĂCEANU figurând ca singurul rezolvitor.

Față de cele de mai sus, propunem ca premiul « ING. ALEXANDRU ROȘU » să se acorde pentru anul XLIX D-lui VASILE D. PĂLĂCEANU, fost elev clasa a VIII-a la liceul Militar „Mihai Viteazul“ din Târgul Mureș, provizoriu azi Timișoara.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. ALEXANDRU ROȘU“

Avocat ALEX. AL. ROȘU, Prof. P. SERGESCU,
Ing. D. STOICA.

Acest raport a fost aprobat de Adunarea generală din 19 Februarie 1945.

NOTE MATEMATICE

24. *Asupra articolului „Poliomologia triunghiurilor oarecari".* *G. M., Vol. L, pag. 209.* Autorul afirmă, că triunghiurile de şase ori omologice nu există. Aparatul de demonstraţie al acestei propoziţii îl constitue: axiomele de legătură şi de dimensiune ale geometriei proiective plane cu, în plus, teorema lui PASCAL (sub forma propoziţiei triunghiurilor de trei ori omologice). Nici urmă de axiomele de ordonare, singurele care separă geometria planului proiectiv real de geometria planului proiectiv complex! Deci propoziţia autorului urmează să fie adevărată şi în complex. Este însă un rezultat clasic, şi cunosc o întreagă literatură în jurul acestui rezultat, că triunghiurile de şase ori omologice există în planul proiectiv complex.

Nu e nevoie să analizăm demonstraţia, de altfel obscură, a autorului, pentru a o declara *a priori falsă,* în baza inventariului axiomatic de mai sus, al mijloacelor întrebuinţate, — chiar dacă în intenţia autorului intră a stabili inexistenţa figurii în planul proiectiv real (propoziţie exactă).

Pentru cititorii *Gazetei Matematice,* cărora problema triunghiurilor de şase ori omologice nu le e cunoscută, voiu intra aici în unele desvoltări.

Luând unul din triungiuri ca triunghiu de referinţă şi normând convenabil coordonatele proiective, obţinem următoarele tablouri pentru coordonatele vârfurilor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

Tablourile centrelor de omologie corespunzătoare ordinelor; ciclice şi aciclice sunt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Această configuraţie complexă poate fi transferată într'o configuraţie reală, printr'una din metodele lui LAGUERRE sau lui STUDY. Cea dintâi are la bază un principiu simplu, de aceea o vom folosi aici. Iată mai întâi acel principiu.

Dacă F e un punct complex şi $\bar{F}$ conjugatul său, se consideră patrulaterul complet determinat de F, $\bar{F}$ şi punctele absolute. Dacă Φ, Φ^* sunt celelalte vârfuri ale sale (în mod necesar reale) se ia ca imagină a lui F perechea Φ, Φ^*, iar a lui $\bar{F}$ perechea Φ^*, Φ. In modul acesta, unei drepte complexe îi corespunde o asemănare inversă descrisă de punctele omoloage Φ, Φ^*; unei drepte reale, simetrice faţă de acea dreaptă. Raportul anarmonic a patru puncte colineare din planul complex este egal cu raportul anarmonic din planul lui GAUSS, al imaginelor (mai bine zis al semi-imaginelor) Φ.

Dăm rezultatul transferării în real a configuraţiei celor două triunghiuri, fără alte detalii. Ba chiar le-am propune pentru demonstraţie directă corespondenţilor *Gazetei*, dacă experienţele noastre anterioare nu ne-ar fi deprins cu un anume scepticism în această privinţă.

Fie triunghiul ABC şi două puncte M^1, M^{*1} din planul său. Există o pereche bine determinată de puncte P_a^1, P_a^{*1} respectiv P_b^1, P_b^{*1} respectiv P_c^1, P_c^{*1} simetrice faţă de BC respectiv CA respectiv AB şi omoloage în asemănarea inversă (indicată prin polul ei şi printr'o pereche de puncte omoloage):

$$A\,[M^1,\ M^{*1}] \text{ respectiv } B\,[M^1,\ M^{*1}] \text{ respectiv } C\,[M^1,\ M^{*1}].$$

Pornind dela P_a^1 construim un lanţ iterat de puncte P_a^i, astfel încât P_a^{i+a} să fie punctul isodinamic interior cercului circumscris triunghiului BP_a^iC, $(i = 2, 3\ldots)$. Avem succesiv:

Propoziţia I. Lanţul e periodic de ordin şase, aşa dar $P_a^7 = P_a^1$.

La fel se introduce lanţurile P_b^i, P_c^i. Completăm lanţurile P_a^i, P_b^i, P_c^i cu simetricele lor P_a^{*i}, P_b^{*i}, P_c^{*i} respectiv faţă de BC, CA, AB.

Propoziţia II. Asemănările inverse:

$$A\,[P_a^i,\ P_a^{*i}] \quad , \quad B\,[P_b^i,\ P_b^{*i}] \quad , \quad C\,[P_c^i,\ P_c^{*i}]$$

admit o pereche de puncte omoloage comună M^i, M^{*i}, *pentru toate valorile impare ale indicelui* $i = 1, 3, 5$ (sau pentru valorile pare).

Propoziţia III. Asemănările inverse:

$$A\,[M^j,\ M^{*j}] \quad , \quad B\,[M^k,\ M^{*k}] \quad , \quad C\,[M^l,\ M^{*l}]$$

unde (j, k, l) *e una din cele şase permutări ale indicilor* (1, 3, 5), *au câte o pereche de puncte omoloage comună.*

Ultima propoziție conține transformarea în real a teoremei considerate.

Independent de ocazia acestei note, recomand amatorilor de geometrie elementară, în interesul rigorii demonstrațiilor lor, să citească pe HILBERT *„Grundlagen der Geometrie"* ediția 7-a, TEUBNER. Vor vedea atunci, că o bună parte din demonstrațiile din revistă și chiar din unele manuale sunt iluzorii, mai ales prin neglijarea axiomelor de ordonare, înlocuite cu nelipsitul *„reiese din figură"*. Nu există două rigori în geometrie, ci numai una singură. Dar aceea trebue păzită.

D. BARBILIAN
Profesor de matematice elementare.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREȘTI
Facultatea Electro-Mecanică

Examenul de intrare. Noembrie 1944. Lucrări scrise.

Geometrie plană. Se dau două cercuri cu centrele în O și O' și care se întâlnesc în două puncte A și B. Se duce diametrul MON paralel cu O'A și diametrul M'O'N' paralel cu OA, punctele M, M' și A fiind de aceeași parte a dreptei OO'. Se cere:

1. Să se arate că triunghiurile MOA și M'O'A sunt asemenea; la fel triunghiurile NOA și N'O'A.

2. Să se deducă că dreptele AM și AM' sunt în prelungire și că dreptele AN și AN' sunt confundate.

3. Că dreptele AMN' și MAM' sunt bisectoarele unghiului OAO'.

Geometrie în spațiu. Se consideră un tetraedru ABCD având muchiile AB = 25 m, AC = 56 m, AD = 16 m, BC = 63 m, CD = 60 m și BD = 33 m.

Se cere:

1. Să se calculeze segmentele determinate pe CD de înălțimea unghiului A în triunghiul ABD și segmentele determinate pe CD de înălțimea unghiului B în triunghiul BCD. Să se deducă că aceste înălțimi se întâlnesc în același punct pe CD.

2. Să se deducă din 1 că direcțiile muchiilor AB și CD fac în spațiu un unghiu drept. Să se arate în același mod același lucru pentru direcțiile (AC, BD) și (AD, BC).

3. Să se calculeze suprafața totală a tetraedrului ABCD.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXV. Nr. 1. Martie 1945. M. GHERMĂNESCU: Reducerea torsorilor la diade. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

M. GHERMĂNESCU. *Trigonometrie plană şi sferică cu aplicaţiuni la Geometria analitică, mecanică, astronomie, topografie, etc.*, Timişoara 1944.

Această carte e apărută în biblioteca *Gazeta Matematică* sub Nr. XXI.

Prefaţa începe cu cuvintele: « *Lucrarea de faţă este un mic tratat de Trigonometrie plană şi sferică susceptibil de amplificare în ediţiile viitoare* ».

„Intr'o formă anterioară mult redusă a constituit cursul pe care l-am predat în anii 1930 - 1936 elevilor şcoalelor de ofiţeri de geniu.

Se vede de aci că acest curs a fost influenţat de un program de şcoală şi de aceea urăm ca această ediţie să se scurgă cât mai curând, căci în limba română până astăzi, nu s'a tipărit un tratat complet de Trigonometrie.

După prefaţă urmează o notiţă istorică pe trei pagini, ceea ce este puţin pentru a da o idee clară de desvoltarea trigonometriei. Recomand citirea istoricului în 2 volume al lui BRAUNMÜHL.

In capitolul I se tratează despre unghiuri, ace şi operaţii cu ele pornind dela cercul trigonometric şi vorbeşte de *radiani* şi se tratează o tabelă de arce. Capitolul este urmat de 64 exerciţii.

Capitolul II se ocupă cu liniile trigonometrice şi funcţiunile circulare, cu variaţia şi periodicitatea lor, cu arcele suplimentare şi complimentare; se tratează câteva exerciţii de ecuaţii trigonometrice simple şi inverse. Capitolul se încheie cu 34 exerciţii.

In capitolul III se studiază tablele trigonometrice naturale şi logaritmice; capitolul se încheie cu 85 exerciţii.

Capitolul IV studiază relaţiile între liniile trigonometrice ale aceluiaşi arc, formulele de transformare, identităţi, ecuaţii trigonometrice, inegalităţi trigonometrice cari lipsesc complet de regulă din trigonometriile elementare. Capitolul se încheie cu 111 exerciţii.

Capitolul V tratează triunghiurile dreptunghice, diverse probleme şi are 54 exerciţii.

Capitolul VI arată cum se fac operaţiile cu arce prin liniile lor trigonometrice. Capitolul are 92 exerciţii.

Capitolul VII se ocupă cu formulele pentru calculul logaritmic şi are 47 exerciţii.

Capitolul VIII tratează despre identităţiile lui EULER, despre seriile lui $\sin x$ şi $\cos x$, despre formulele lui MOIVRE, despre extragerea rădăcinilor imaginare, ecuaţiile binome, derivatele funcţiunilor inverse. Capitolul are 56 exerciţii.

In capitolul IX se tratează triunghiurile oarecari, relaţiile între elementele lor, rezolvarea lor, calculul înălţimilor, medianelor şi bisectoarelor, razelor cercurilor circumscrise, înscrise şi exînscrise, aria triunghiului, diverse probleme. Capitolul are 153 exerciţii.

Capitolul X rezolvă patrulatere şi are 23 exerciţii.

In capitolul XI se dau aplicaţiuni la geometria analitică, la statică şi cinematică. Capitolul n'are niciun exerciţiu.

La capitolul XII se dau chestiuni de topografie, geodezie şi are 19 exerciţii.

La pag. 274—336 se tratează trigonometria sferică.

Capitolul XIII conţine formulele generale şi are 12 exerciţii.

Capitolul XIV tratează despre triunghiuri dreptunghice şi are 4 exerciţii.

Capitolul XV se ocupă de triunghiurile oarecari cu rezolvarea lor, cu excesul sferic şi are 30 exerciţii.

Capitolul XVI dă aplicaţiuni la astronomie şi are 20 exerciţii. La fine sunt *Noţiuni de Trigonometrie patratică* şi un index bibliografic.

Numărul cel mare de exerciţii, aproape de 800, explică materia tratată şi completează lipsurile. Lipsesc studiile problemelor cu parametri variabili, formule pentru multipli de arce cari servă pentru serii, etc.

I. IONESCU.

CERERI

335. Manuscrisul donat de D-l T. I. GÂLCĂ, de care se vorbeşte la rubrica Diverse din acest număr, se bănueşte a fi al lui CUTIANU. I s'ar putea stabili autorul indiscutabil pe baza următoarelor date. Pe pagina 1 e titlul *Analisulu superioru.* Lectiunea III. *Teoria elementară a seriilor.* Partea cu calculul diferenţial nu e paginată. Urmează *Rezistenţa materialelor* paginate dela 1 la 116. *Mecanica* dela pag. 170 la 425. Urmează paginile 1—93 cu chestiuni de mecanică.

Cu aceste elemente să se găsească autorul şi anul litografierei cursului, care poate fi examinat la biblioteca societăţii *Gazeta Matematică.*

I. IONESCU.

Răspuns la cererea 332. Anul XLIX, pag. 677. Se cere semnificaţia cuvintelor « *macédoine mathématique* ».

In limba franceză familiară cuvântul „macédoine" însemnează un amestec de elemente asemănătoare. De exemplu, „macédoine de fruits", „salade macédoine", etc. Probabil că acest calificativ vine dela faptul că în Macedonia trăiesc laolaltă mai multe naţionalităţi. Ca atare « *macédoine mathématique* » însemnează o culegere de diferite proprietăţi şi curiozităţi matematice, care nu sunt grupate după o ordine logică sau sistematică, ci după criterii subiective. Noţiunea e echivalentă cu « varia *mathematica* » şi s'ar putea traduce prin „felurite adevăruri matematice" sau „material matematic variat".

P. S.

DIVERSE

a) **Adunările Societăţii „Gazeta Matematică"**

In Adunarea generală extraordinară din ziua de 26 Martie 1945 a fost ales membru al societăţii noastre D-l C. VASILIU, Inginer şi Licenţiat în Matematici.

b) **Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"**

A. M. LEGENDRE. Eléments de géométrie avec additions et modifications, par A. BLANCHET, 11-ème éd. Paris 1864.

Autorul necunoscut *) Manuscris litografiat de analiză, calcul diferenţial, rezistenţa materialelor şi unele capitole de mecanică.

Donate de D-l Ing. T. I. GĂLCĂ.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4283. *Se consideră un număr întreg*

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

descompus în factori primi şi se pune

$$F_1(N) = 1 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n,$$

$$F_2(N) = F_1(F_1(N)),\ F_3(N) = F_1(F_2(N)), \dots \text{ etc.}$$

Să se arate că, oricare ar fi $N > 6$, *valorile finale ale lui* $F_m(N)$ *sunt 7 şi 8 care se alternează.*

Să se examineze aceeaşi problemă, când F_1 *se defineşte prin suma* $1 + \alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \dots + \alpha_n^2 p_n$.

TIB. POPOVICIU.

Soluţia. 1. Vom examina întâi diferenţa $N - F_1(N)$. Dacă $N \geqq 2$ este prim avem $N - F_1(N) = -1$. Se mai observă că dacă în plus $N > 2$, numărul $N + 1$ sigur nu este prim.

Diferenţa $N - F_1(N)$ depinde de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ şi este o funcţie crescătoare de aceşti exponenţi, căci

$$p_1 N - F_1(p_1 N) - [N - F_1(N)] = N(p_1 - 1) - p_1$$

$$\geqq 2(p_1 - 1) - p_1 = p_1 - 2 \geqq 0$$

şi chiar sigur > 0 dacă $N > 2$. Rezultă că

$$(1) \quad N - F_1(N) \geqq p_1 p_2 \dots p_n - p_1 - p_2 - \dots - p_n - 1.$$

*) Vezi cererea 335.

Putem scrie

$$(2)\quad \begin{cases} p_1 p_2 \dots p_n - p_1 - p_2 - \dots - p_n = \Sigma (p_1 - 1)(p_2 - 1) + \\ + \Sigma (p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) + \dots + \\ + (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_n - 1) - n + 1, \end{cases}$$

însumările referindu-se la combinările câte 2, 3,... ale numerelor $p_1 - 1$, $p_2 - 1, \dots$

Din (2) rezultă imediat că membrul al doilea al inegalității (1) este crescător în raport cu $p_1, p_2, \dots, p_n$. Rezultă că

$$(3)\quad N - F_1(N) \geqq q_1 q_2 \dots q_n - q_1 - q_2 - \dots - q_n - 1,$$

dacă $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ sunt numerele prime în ordinea lor naturală.

E ușor de verificat că membrul al doilea al inegalității (3) crește cu n.

In definitiv deci, dacă N are cel puțin trei factori primi diferiți, avem

$$(4)\quad N - F_1(N) \geqq q_1 q_2 q_3 - q_1 - q_2 - q_2 - 1 = 19.$$

Să examinăm acum numerele de forma $p_1^{\alpha_1}$ $(\alpha_1 > 1)$ și $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ $(\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0)$.

Avem

$$p_1^{\alpha_1} - F_1(p_1^{\alpha_1}) \begin{cases} = -1, & p_1 = 2,\ \alpha_1 = 2, \\ = 1, & p_1 = 2,\ \alpha_1 = 3, \\ \geqq 2, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Intr'adevăr $2^{\alpha_1} - 2\alpha_1 - 1$ este crescător în α_1 pentru $\alpha_1 \geqq 2$. Tot astfel $p_1^{\alpha_1} - \alpha_1 p - 1$ este crescător în p_1 iar $3^{\alpha_1} - 3\alpha_1 - 1$ este crescător în α_1 pentru $\alpha_1 \geqq 2$.

O discuție analoagă ne arată că

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} - F_1(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) \begin{cases} = 0 & p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \\ \geqq 2, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Putem acum demonstra următoarea

LEMA 1. *Dacă* $N > 8$, *avem* $N > F_2(N)$.

Două cazuri trebuesc examinate:

1°. Dacă N este prim, avem $F_1(N) = N + 1$. Dar $N + 1$ nu este prim și este > 8, deci $N + 1 - F_1(N + 1) \geqq 2$, sau $N - F_2(N) \geqq 1 > 0$.

2°. Dacă N nu este prim, avem $N - F_1(N) \geqq 2$. Insă $F_1(N) - F_2(N) \geqq -1$, deci $N - F_2(N) \geqq 1 > 0$. Lema este complet demonstrată.

Să trecem acum la rezolvarea problemei propuse. Să considerăm şirul $(N > 1)$,

$$(5) \qquad N = F_0(N),\ F_1(N),\ N_2(N), \ldots,$$

Un calcul simplu ne arată că $F_1(N)$:

1°. Nu poate fi egal cu 2.

2°. Nu este egal cu 3 decât pentru $N = 2$.

3°. Nu este egal cu 4 decât pentru $N = 3$.

4°. Nu este egal cu 5 decât pentru $N = 4$.

5°. Nu este egal cu 6 decât pentru $N = 5$ şi $N = 6$.

Rezultă că dacă $N > 6$, toţi termenii şirului (5) sunt > 6.

Observăm acum că $F_1(7) = 8$, $F_1(8) = 7$. Prin urmare, dacă $N = 7$ resp. $N = 8$, şirul (5) este periodic, perioada fiind formată din 7, 8 resp. 8, 7.

Fie acum $N > 8$. Şirul de numere naturale (5) conţine un cel mai mic număr. Fie $F_m(N)$ un termen egal cu acest minimum. Vom demonstra că:

1°. Nu putem avea $F_m(N) = 8$. Intr'adevăr, în cazul contrar, am avea $F_{m+1}(N) = 7$, care contrazice ipoteza că $F_m(N)$ ia valoarea minimă.

2°. Nu putem avea $F_m(N) > 8$. Intr'adevăr, în cazul contrar, am avea, conform lemei 1, $F_{m+2}(N) < F_m(N)$, care iarăşi contrazice faptul că $F_m(N)$ este egal cu cel mai mic număr ai şirului (5).

Rezultă dar că trebue să avem $F_m(N) = 7$ şi acest lucru demonstrează complet prima parte a problemei propuse.

2. Pentru a trata şi partea a doua a problemei vom examina o problemă ceva mai generală.

Pentru aceasta vom studia şirul (5) când $F_1(N)$ este definit de formula mai generală

$$(6) \qquad F_1(N) = r + \alpha_1^k p_1 + \alpha_2^k p_2 + \ldots + \alpha_n^k p_n,$$

unde r şi k sunt două numere întregi pozitive sau nule date.

Va trebui întâi să examinăm funcţia aritmetică

$$f(N) = N - F_1(N) + r = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} - \alpha_1^k p_1 - \alpha_2^k p_2 - \ldots - \alpha_n^k p_n.$$

Vom presupune, pentru fixarea ideilor, că $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ dar, bine înţeles, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nu sunt neapărat primele n numere prime. Exponenţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sunt întregi şi pozitivi. Funcţia $f(N)$ este definită pentru orice număr $N > 1$.

Dacă N este prim avem $f(N) = 0$.

Vom examina acum cazul când N nu este prim.

Avem întâi următoarea

LEMA 2. *$n \geqq 1$ fiind dat, oricărui număr pozitiv* A *corespunde un număr pozitiv* α *astfel ca să avem*

$$f(N) > A, \quad \text{dacă} \quad \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \geqq \alpha.$$

Funcţia de x,

$$2^{x+n-2} - nx^k$$

tinde către $+\infty$ când $x \to +\infty$. Putem deci alege un α întreg > 1, astfel ca să avem

$$2^{x+n-2} - nx^k > \frac{A}{q_n}, \quad \text{pentru } x \geqq \alpha,$$

unde q_n este al n^{lea} număr prim. Acest α satisface lema 2. Într'adevăr avem $p_n \geqq q_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n \geqq 2$ şi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geqq \alpha' + n - 1, \text{ dacă } \alpha' = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Dacă deci $\alpha' \geqq \alpha$, putem scrie

$$A < q_n (2^{\alpha'+n-2} - n\alpha'^k) \leqq p_n \left(2^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-1} - \alpha_1^k - \alpha_2^k - \ldots - \alpha_n^k\right) \leqq$$

$$\leqq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} - \alpha_1^k p_1 - \alpha_2^k p_2 - \ldots - \alpha_n^k p_n = f(N)$$

şi lema 2 este demonstrată.

Avem acum

LEMA 3. *Numărul* $n \geqq 1$ *şi exponenţii* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *fiind daţi astfel ca* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 1$, *oricărui număr pozitiv* A *corespunde un număr* P *astfel ca să avem*

$$(7) \qquad f(N) > A, \quad \text{pentru} \quad p_n \geqq P.$$

Demonstraţia o facem în două etape:

1°. Să presupunem că $\alpha_n \geqq 2$. E destul să alegem un

$$P > \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k\right)^2 + 4A}\right).$$

Avem atunci, pentru $p_n \geqq P$,

$$A < p_n^2 - (\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_n^k)\, p_n \geqq f(N).$$

2°. Să presupunem acum că $\alpha_n = 1$. Trebue să avem atunci $n > 1$. Avem

$$(8)\quad f(N) = p_n (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} - 1) - \alpha_1^k p_1 - \alpha_2^k p_2 - \ldots - \alpha_{n-1}^k p_{n-1} >$$
$$> f(N_1) + [(\alpha_{n-1} + 1)^k - \alpha_{n-1}^k - 1]\, p_n \geqq f(N_1),$$

unde

$$N_1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{n-2}^{\alpha_{n-2}} p_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1} - \alpha_1^k p_1 - \alpha_2^k p_2 - \ldots - \alpha_{n-2}^k p_{n-2} -$$
$$- (\alpha_{n-1} + 1)^k\, p_{n-1}.$$

Ştim însă dela 1° că există un P' astfel ca pentru $p_{n-1} \geqq P'$ să avem $f(N_1) > A$. Pe de altă parte nu există decât un număr finit de numere N_1 cu exponenţii α_i daţi şi cu $p_{n-1} < P'$. Observăm apoi că

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}} - 1 > 0,$$

aşa că formula (8) ne arată că putem găsi un P'' astfel ca pentru $p_{n-1} \geqq P''$ să avem încă $f(N) > A$. In definitiv deci

$$f(N) > A, \quad \text{pentru} \quad p_n \geqq P = \max(P', P'').$$

Ultima inegalitate (8) nu este exactă dacă $k = 0$. Totuşi proprietatea rămâne adevărată şi în acest caz. Pentru a vedea acest lucru e destul să observăm că în acest caz

$$f(N) \geqq p_1 p_2 \ldots p_n - p_1 - p_2 - \ldots - p_n$$

şi să aplicăm formula (2), împreună cu un raţionament deja făcut la Nr. 1.

Lema 3 este deci complet demonstrată.

In fine să demonstrăm şi

LEMA 4. *Oricărui număr pozitiv* A *corespunde un număr întreg şi pozitiv* ν *astfel ca pentru orice număr* N *având cel puţin* ν *factori primi diferiţi să avem*

$$f(N) > A.$$

Pentru aceasta vom arăta întâi că dacă n este destul de mare $f(N)$ este crescător în $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Fie

$$N_i = p_i N,$$

avem

$$f(N_1) - f(N) = N(p_i - 1) - [(\alpha_i + 1)^k - \alpha_i^k]\, p_i.$$

Observăm acum că raportul

$$\frac{(x+1)^k - x^k}{2^{x-1}}$$

tinde către 0 când $x \to +\infty$. Când $x \geqq 1$, acest raport are deci un maximum pozitiv egal cu λ, aşa că avem

$$\frac{(x+1)^k - x^k}{2^{x-1}} \leqq \lambda \tag{9}$$

sau $\lambda . 2^{x-1} - [(x+1)^k - x^k] \geqq 0$, pentru $x \geqq 1$.

Avem acum

$$N \geqq q_1 q_2 \dots q_{n-1} p_i^{\alpha_i},$$

unpe $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ sunt primele $n-1$ numere prime.

Vom alege pe ν' astfel ca să avem

$$q_1 q_2 \dots q_{n-1} > \lambda, \text{ pentru } n \geqq \nu'.$$

Vom avea, pe baza inegalităţii (9)

$$\begin{aligned} N(p_i - 1) - [(\alpha_i + 1)^k - \alpha_i^k] p_i &\geqq N - [(\alpha_i + 1)^k - \alpha_i^k] p_i \\ &\geqq q_1 q_2 \dots q_{n-1} p_i^{\alpha_i - 1} - [(\alpha_i + 1)^k - \alpha_i^k] > \\ &> \lambda . 2^{\alpha_i - 1} - [(\alpha_i + 1)^k - \alpha_i^k] \geqq 0, \end{aligned}$$

deci

$$f(N_1) - f(N) > 0$$

şi $f(N_1)$ este crescător în α_i.

Rezultă de aici că

$$f(N) \geqq p_1 p_2 \dots p_n - p_1 - p_2 - \dots - p_n, \text{ pentru } n \geqq \nu'.$$

Dar formula (2) ne arată, ca mai sus, că putem găsi un ν'' astfel ca

$$p_1 p_2 \dots p_n - p_1 - p_2 - \dots - p_n > A, \text{ pentru } n \geqq \nu''.$$

Rezulta deci că

$$f(N) > A, \text{ pentru } n \geqq \nu = \max(\nu', \nu''),$$

tocmai ceeace trebuia demonstrat.

Din lemele 2, 3, 4 demonstrate deducem următoarea

TEOREMA 1. *Oricărui număr* A *corespunde un alt număr* B *astfel ca să avem*

$$f(N) > A, \tag{10}$$

pentru N *neprim* şi $> B$.

Cu alte cuvinte, funcţia aritmetică $f(N)$ se bucură de proprietatea

$$\lim_{N \to +\infty} f(N) = +\infty$$

N luând însă numai valori neprime.

Într'adevăr, pe baza lemei 4, există un ν astfel ca toate numerile N având cel puţin ν factori primi diferiţi să satisfacă inegalitatea (10). Rămân de examinat numerile neprime cari au 1, 2, ... sau $\nu - 1$ factori primi diferiţi. E destul să arătăm că dintre numerile având $n < \nu$ factori primi diferiţi numai cel mult un număr finit nu satisfac inegalitatea. Pe baza lemei 2, un astfel de număr trebue să aibă toţi exponenţii α_i mai mici ca un număr fix. In fine, pe baza lemei 3, dintre acestea numai cel mult un număr finit nu satisface inegalitatea (10).

3. Putem acum reveni la problema noastră. Generalizarea anunţată este cuprinsă în următoarea

TEOREMA 2. *Dacă* r, k *sunt două numere întregi pozitive sau nule date şi dacă* $F_1(N)$ *este definit de* (6), *şirul* (5) *este mărginit, oricare ar fi* $N > 1$.

Din faptul că $N - F_1(N) = -r$ pentru N prim şi din teorema 1 rezultă că diferenţa $N - F_1(N)$ are un minimum $\leqq -r$. Avem deci

$$N - F_1(N) \geqq -\mu,$$

oricare ar fi $N > 1$, μ fiind un număr întreg $\geqq r$.

Vom examina întâi cazul când $r > 0$. Fie atunci q cel mai mic număr prim care nu divide pe r. Dacă p este un număr prim diferit de q unul din numerile

$$(11) \qquad p + r,\ p + 2r, \ldots,\ p + (q-1)\,r$$

este divizibil cu q. Acest număr este sigur compus dacă de ex. presupunem că $p > q$.

Din teorema 1 rezultă că există un număr ρ_1 astfel ca să avem

$$(12) \quad N - F_1(N) > (q-1)\,r, \text{ pentru N neprim şi } > \rho_1.$$

Acest număr ρ_1 îl putem presupune, pentru simplificare, mai mare decât q.

Acestea fiind spuse să demonstrăm

LEMA 5. *Oricare ar fi* $N > 1$, *cel mai mic număr al şirului* (5) *este cel mult egal cu* ρ_1.

Pentru demonstrație să presupunem că $F_m(N)$ este egal cu cel mai mic număr al șirului și că, contrar celor spuse, $F_m(N) > \rho_1$. Fie atunci $F_m(N) + ir$ primul număr compus din șirul (11), complectat cu un prim termen p și unde am pus $p = F_m(N)$. i poate lua una din valorile 0, 1, 2,..., $q-1$. Vom avea

$$F_{m+1}(N) = F_m(N) + r,\ F_{m+2}(N) = F_m(N) + 2r, \ldots, F_{m+i}(N) = F_m(N) + ir,$$

iar, pe baza inegalității (12),

$$F_{m+i}(N) - F_{m+i+1}(N) > (q-1)\,r.$$

Rezultă că

$$F_{m+i+1}(N) < F_{m+i}(N) - (q-1)\,r = F_m(N) - (q-i-1)\,r \leqq F_m(N),$$

ceea ce contrazice ipoteza făcută asupra lui $F_m(N)$.

Lema 5 este deci demonstrată.

Se vede că pentru a demonstra teorema 2 este suficient să o demonstrăm numai pentru numerele $\leqq \rho_1$.

Tot pe baza teoremei 1 putem găsi un ρ_2 astfel ca

$$(13)\quad N - F_1(N) \geqq \mu + (q-1)\,r, \text{ pentru N neprim } > \rho_2.$$

Dacă punem $\rho = \max(\rho_1, \rho)$ cu atât mai mult va fi suficient să demonstrăm teorema 2 numai pentru numerele $\leqq \rho$.

Fie deci $N \leqq \rho$. Să presupunem că există un prim termen $F_m(N)$ care este $> \rho$. Atunci $F_{m-1}(N) \leqq \rho$ și

$$(14)\qquad F_m(N) \leqq F_{m-1}(N) + \mu.$$

Fie din nou $F_m(N) + ir$ primul număr compus din șirul (11), unde $p = F_m(N)$, acest șir fiind complectat cu primul termen $F_m(N)$.

Din (13) și (14) deducem

$$F_{m+i}(N) = F_m(N) + ir\ ,\ F_{m+i+1}(N) - F_{m+i+1}(N) \geqq \mu + (q-1)\,r,$$

deci

$$F_{m+i+1}(N) < F_{m+i}(N) - \mu - (q-1)\,r = F_m(N) - \mu - (q-i-1)\,r$$
$$\leqq F_{m-1}(N) - (q-i-1)\,r \leqq \rho.$$

Din această analiză rezultă imediat că toți termenii șirului (5) sunt $\leqq \rho + \mu + (q-1)\,r$ și teorema 2 este demonstrată.

A mai rămas să examinăm cazul $r = 0$. In acest caz, dacă în şirul (5) este cel puţin uu număr prim, de ex. $F_m(N)$, toţi termenii următori sunt egali cu acesta şi teorema e demonstrată. Dacă nici un termen al şirului (5) nu ar fi prim raţionamentul şi formulele de mai sus s'ar aplica luând $r = 0$ şi $q = 1$. Teorema este încă demonstrată. E de observat că pentru $r = 0$ lema 5 nu mai este adevărată. Ea însă rămâne adevărată pentru eventuelele şiruri (5) formate numai din numere compuse.

4. Teorema 2 se poate enunţa şi sub următoarea formă echivalentă

TEOREMA 2'. *Dacă* r, k *sunt două numere întregi pozitive sau nule date şi dacă* $F_1(N)$ *este definit de* (6), *şirul* (5) *devine periodic începând dela un anumit rang, oricare ar fi* $N > 1$.

Din cele ce preced rezultă chiar mai mult. Dacă $r > 0$ numai un număr finit de perioade sunt posibile şi pentru a le găsi pe toate e suficient să examinăm şirurile (5) pentru $N \leqq \rho_1$, unde ρ_1 este numărul definit la Nr. 3. Pentru $r = 0$ perioada poate fi formată dintr'un singur număr prim oarecare sau eventual din acelea date de numerile $N \leqq \rho_1$.

Pentru valori particulare ale lui r şi k o examinare mai atentă permite să rerolvăm mai complet problema, după cum s'a făcut la început pentru $r = 1$, $k = 1$. Vom mai examina aici încă două cazuri

1°. Fie $r = 1$, $k = 0$. In acest caz găsim $q = 2$ şi $\rho_1 = 6$. Pentru $N = 2, 3, 4, 5, 6$ şirul (5) se prezintă sub forma

2, 3, 4, 3, ...

3, 4, 3, ...

4, 3, 4, ...

5, 6, 6, ...

6, 6, ...

Rezultă dar că în general şirul (5) poate prezenta trei aspecte diferite. Sau devine periodică cu perioada 3, 4 sau cu perioada 4, 3 sau în fine cu perioada formată din singurul număr 6. Acest rezultat se datoreşte lui OLTRAMARE, de unde a fost inspirată de altfel broblema 4283.

2°. Fie $r = 1$, $k = 2$. Acest caz e ceva mai complicat. Pentru determinarea numărului ρ_1 folosim rezultatele dela Nr. 2. Raportul

$$\frac{2x+1}{2^{x-1}},$$

când $x \geqq 1$, are un maximum egal cu 3. Se deduce că

$$N - F_1(N) \geqq 2.3.5 - 2 - 3 - 5 - 1 = 19, \text{ pentru } n \geqq 3.$$

Pentru numerele având unul sau doi factori primi diferiți găsim

$$p_1^{\alpha_1} - F_1(p_1^{\alpha_1}) \begin{cases} = -5, & p_1 = 2, & \alpha_1 = 2, \\ = -11, & p_1 = 2, & \alpha_1 = 3, \\ = -17, & p_1 = 2, & \alpha_1 = 4, \\ = -19, & p_1 = 2, & \alpha_1 = 5, \\ = -9, & p_1 = 2, & \alpha_1 = 6, \\ = -4, & p_1 = 3, & \alpha_1 = 2, \\ = -1, & p_1 = 3, & \alpha_1 = 3, \\ \geqq 4, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} - F_1(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1}) \begin{cases} = 0, p_1 = 2, p_2 = 3, \alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ sau } \alpha_1 = 2, \alpha_1 = 1. \\ \geqq 2, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Avem $q = 2$, deci $(q - 1)$ și se vede că numărul ρ_1 din lema 5 este egal cu 64. Este suficient deci să formăm șirurile (5) pentru $N \geqq 64$ și găsim astfel:

1°. Perioada 14, 10, 8, 19, 20 pentru numerele $N = 2, 3, 4, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 33, 35, 37, 38, 40, 41, 42, 45, 46, 50, 52, 55, 56, 57, 59, 60, 64$.

2°. Perioada 20, 14, 10, 8, 19 pentru $N = 20, 34, 43, 44, 61, 62, 63$.

3°. Perioada 10, 8, 19, 20, 14 pentru $N = 10$.

4°. Perioada 8, 19, 20, 14, 10 pentru $N = 7, 8$.

5°. Perioada 19, 20, 14, 10, 8 pentru $N = 19$.

6°. Perioada formată din singurul număr 12 pentru $N = 11, 12, 21, 25, 29, 30, 31, 32, 36, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 58$.

7°. Perioada formată din singurul număr 6 pentru $N = 5, 6$.

E de observat că în primele 5 cazuri perioadele se obțin prin permutări circulare una din alta. Reamintim că perioada șirului (5) începe cu primul număr care se repetă.

Pentru numerele > 64 cazul 3° nu se mai poate prezenta căci $F_1(N) = 10$ numai pentru $N = 14$. Cazul 4° de asemenea nu se mai poate prezenta căci avem $F_1(N) = 8$ numai pentru $N = 7$ iar relația $F_1(N) = 7$ este imposibilă. In fine nici cazul 7° nu se mai poate prezenta căci $F_1(N) = 6$ nu are decât soluțiile $N = 5, 6$ iar relația $F_1(N) = 5$ este imposibilă. In definitiv deci pentru $N > 64$ șirul (5) este în una din cazurile 1°, 2°, 5° sau 6°.

Notă. 1°. Timp de 10 ani nu s'a primit nicio soluție dela corespondenți.

2°. Egalitatea (2), pe care am folosit-o de mai multe ori, se poate stabili în felul următor. Fie

$$f(x) = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n A^n$$

polinomul care are ca zerori pe $p_1, p_2, \ldots, p_n$ și

$$\varphi(x) = x^n - B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n B_n$$

polinomul cu zerorile $p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_n - 1$. Avem $\varphi(x) = f(x+1)$, de unde

$$f(0) = (-1)^n A_n = \varphi(-1) = (-1)^n [1 + B_1 + B_2 + \ldots + B_n].$$

Dar $B_n = A_n - n$ deci

$$A_n - A_1 = B_2 + B_3 + \ldots + B_n - n + 1,$$

tocmai ceea ce trebuia demonstrat.

T. P.

PROBLEMA 5049. *Se proiectează un punct* A *din plan pe două drepte* D_1 *și* D_2 *în* A_1 *și* A_2. *Fie* A_3 *al patrulea vârf al paralelogramului* $AA_1A_2A_3$.

1°. *Tangenta în* A_3 *la cercul cu centrul în* A *și de rază* AA_3, *limitată la cele două drepte, are mijlocul în* A_3.

2°. *Celelalte trei puncte de pe cercul* (A) *care se bucură de aceeași proprietate, formează un triunghiu echilateral.*

CPT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

Soluția 1-a. Problema de față este un caz particular al problemei 1386 *) rezolvată la pag. 311, Vol. XL al acestei reviste:

„Se dă un cerc în interiorul unui unghiu XOY.

Să se ducă o tangentă, așa ca punctul ei de contact să fie mijlocul segmentului din tangență, limitat la laturile unghiului dat".

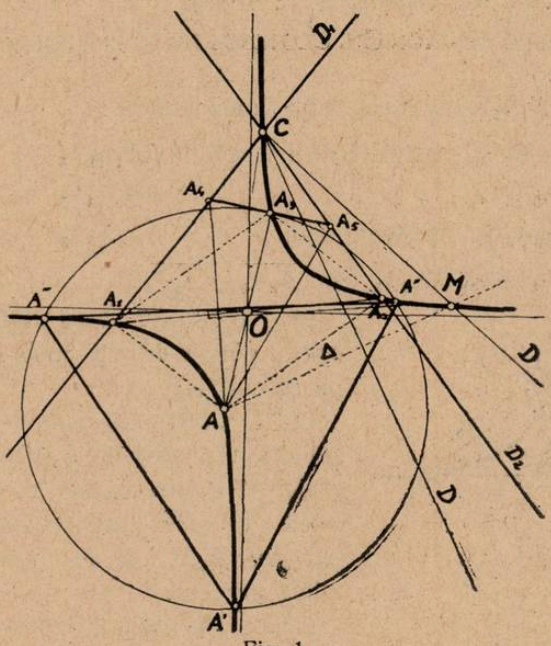


Fig. 1.

Dacă dreptele D_1 și D_2 care se taie în C formează unghiul dat și A centrul cercului, să proiectăm pe A și C pe D_1 și D_2 în A_1 și A_2. Fie O mijlocul lui $A_1 A_2$.

Se știe că punctele căutate pe cercul (A), în care tangentele să se bucure de proprietatea din enunțul problemei 1389 se găsesc la intersecția cu *hiperbola echilateră* (H) *care are centrul în* O, *asimptotele paralele cu bisectoarele unghiului dreptelor* D_1, D_2 *și trecând prin* A, A_1, A_2, C.

Problema 5049 se obtine particularizând cercul (A) astfel ca să treacă prin A_3 simetricul lui A față ce centrul O al hiperbolei (H).

*) In legătură cu problema 1386 a se vedea:

1°. *« O soluție geometrică și o generalizare a problemei 1386 »* de G-L GH. POPESCU (Vol. XLI, pag. 127).

2°. *« Două probleme »* de LT. M. I. FOCȘENEANU (Vol. XLI, pag. 425).

3°. *« Asupra problemelor 1386 și 2889 »* de D-l M. GHERMĂNESCU (Vol. XLI, pag. 469).

4°. Nota Nr. 42. *« Asupra unor articole »* de LT. M. I. FOCȘENEANU (Vol. XLI, pag. 528).

5°. *« In jurul problemelor 1386 și 2889 »* de LT. M. I. FOCȘENEANU (Vol. XLII, pag. 576).

6°. Problema 3760 propusă de D-l G-L GH. BUICLIU și rezolvată în Vol. XLII, pag. 535.

Rezultă deci:

1°. *Tangenta în* A_3 *la cercul cu centrul* A *şi raza* AA_3, *limitată la dreptele* D_1 *şi* D_2 *are mijlocul în* A_3.

2°. *Celelalte 3 puncte de intersecţie ale hiperbolei* (H) *cu cercul* (A) *formează un triunghiu echilateral.* (Conform unei teoreme cunoscute: F. G. M., *Géométrie*, p. 1048).

Soluţia a 2-a, dată de D-l ION GH. COSTESCU (student-inginer, Politehnica Bucureşti).

1°. Triunghiul AA_4A_5 este isoscel din consideraţiile:

$\sphericalangle AA_4A_3 = \sphericalangle AA_1A_3$ în patrulaterul inscriptibil $AA_1A_4A_3$

$\sphericalangle AA_2A_3 = \sphericalangle AA_5A_3$ „ „ „ $AA_2A_5A_3$

$\sphericalangle AA_1A_3 = \sphericalangle AA_2A_3$ în paralelogramul $AA_1A_2A_3$

$$\therefore \sphericalangle AA_4A_5 = \sphericalangle AA_5A_3 \text{ şi } \overline{A_3A_4} = \overline{A_3A_5}.$$

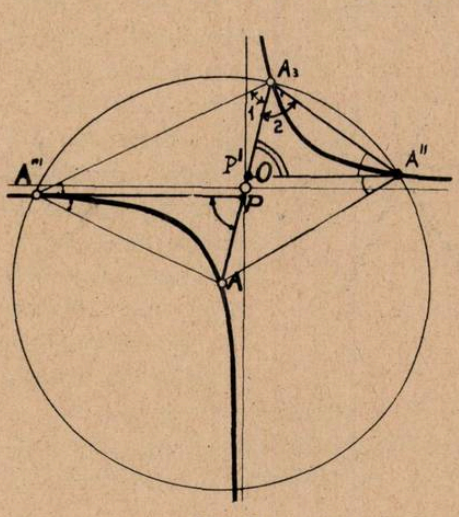


Fig. 2.

2°. Fie A", A‴ două din cele 3 puncte diferite de A_3, pe cercul (A).

D-l I. COSTESCU demonstrează cu unghiurile $A_3A''A$ şi A_3AA''' au bisectoarele paralele cu ale unghiurilor A_3A_2A şi A_3A_1A şi deci paralele între ele.

Fie P şi P' picioarele bisectoarelor unghiurilor A‴ şi A".

Avem atunci:

$$\hat{1} = \frac{2}{3}\hat{P} \quad \text{şi}$$

$$\hat{2} = \frac{2}{3}(\pi - \hat{P})$$

$$\therefore \hat{1} + \hat{2} = \sphericalangle A'''A_3A'' = \frac{2}{3}\pi = 120^0$$

adică $\overline{A''A'''}$ este latura triunghiului echilateral.

Notă. 1°. D-l I. COSTESCU a mai demonstrat proprietatea 2, arătând prin consideraţii de omografie că punctele căutate se găsesc pe hiperbola (H) şi că deci cercul (A) trecând prin A_3, taie pe (H) în alte 3 puncte, vârfurile unui triunghiu echilateral.

2°. Dacă observăm că A_3 este ortocentrul triunghiului CA_1A_2, iar A diametral opusul lui C în cercul CA_1A_2, problema se poate enunța astfel:

a) Fiind dat un triunghiu ABC *cu ortocentrul* H, *iar* A_1, B_1, C_1 *diametralele vârfurilor lui* ABC, *tangentele în* H *la cercurile de centre* A_1, B_1, C_1 *și trecând prin* H, *limitate la laturile lui* ABC, *au mijlocul în* H.

b) Pe fiecare din cele 3 cercuri se află încă câte 3 puncte care se bucură de aceeași proprietate și care formează 3 triunghiuri echilaterale.

3°. Problema Nr. 5958 a D-lui R. BOUVAIST propusă la pag. 591, Vol. XLIX și nerezolvată încă, este de asemenea un caz particular al problemei 1386.

Ultima proprietate enunțată în 5958 este o particularizare a proprietății 2 a problemei de față.

4°. Este interesant de studiat soluția cu ajutorul hiperbolelor (H_1) și (H_2) din articolul « *Două probleme* » (Vol. 41, pag. 425—429).

MAIOR M. I. FOCȘENEANU.

PROBLEMA 5128. *Să se studieze natura seriei cu termenul general*

$$u_n = \frac{n!}{(1+k_1)(2+k_1)\cdot(p+k_p)(p+1+k_1)(p+2+k_2)\ldots(2p+k_p)\ldots},$$

unde numitorul este un produs de n *factori, iar* $k_1, k_2, \ldots, k_p$ *numere pozitive.*

M. GHERMĂNESCU.

Dacă $n = mp + r$, aplicând teorema raportului, avem

$$\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim \frac{mp + r + 1 + k_{r+1}}{n+1} = \lim \frac{n + 1 + k_{r+1}}{n+1} = 1$$

care nu duce la nicio concluzie. Să aplicăm atunci criteriul lui RAABE-DUHAMEL [1]); avem:

$$\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim n \left(\frac{k_{r+1}}{n+1} \right) = k_{r+1} \quad , \quad r = 1, 2, \ldots p.$$

Criteriul lui RAABE-DUHAMEL ne dă deci p limite diferite k_i. In acest caz, o teoremă ce am stabilit în articolul „Convergența seriilor cu termeni pozitivi", din G. M., v. XLIII, 1938, p. 457—60,

1. A se vedea, de ex.: *Curs de Algebră superioară*, de M. GHERMĂNESCU

ne spune că seria dată este convergentă sau divergentă, după cum media aritmetică a numerelor k_i

$$\lambda = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_p}{p} \lesseqgtr 1$$

este superioară sau inferioară unității.

Notă. 1°. La această problemă a trimis o încercare de soluție D-l MIRCEA D. POPA, pe când era în liceu, în care aplică criteriul lui RAABE-DUHAMEL dar necunoscând probabil articolul meu, conchide că seria este convergentă când $k_i > 1$, ceea ce este adevărat, dar nu necesar.

2°. Ar fi interesant să se examineze cazul $k_1 + k_2 + \ldots k_p = p$.

M. G.

PROBLEMA 5588. *Să se calculeze suma:*

$$S = \sin^2 a + C_m^1 \sin^2 (a+b) + C_m^2 \sin^2 (a+2b) + \ldots$$
$$\ldots + C_m^m \sin^2 (a+mb).$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluție dată de D-nii: ADRIAN I. POPESCU (elev-inginer S.P.T.), P. P. DRĂGHICESCU, C. BAKONYI (Timișoara), GEORGE GH. DONȚU (clasa a VIII-a lic. de aplicație, Iași), ȘERBAN I. STOIANOVICI (clasa a VII-a), VLAD GH. JURIST (clasa a VI-a), CONST C. ILIESCU (clasa a VI-a), IONEL PURICA (clasa a VI-a), MIRCEA BUZESCU (clasa a VI-a), JUSTINIAN C. CORTUȘAN (elevi colegiul național „N. Filipescu", Predeal), DUMITRU GH. VASILIU (liceul militar, Iași).

Să asociem sumei date suma:

$$S_1 = \cos^2 a + C_m^1 \cos^2 (a+b) + C_m^2 \cos^2 (a+2b) + \ldots$$
$$\ldots + C_m^m \cos^2 (a+mb).$$

Deducem imediat:

$$(1) \begin{cases} S_1 + S = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m \\ S_1 - S = \cos 2a + C_m^1 \cos (2a+2b) + \ldots + C_m^m \cos (2a+2mb) \end{cases}$$

Facem notațiile:

$$A = S_1 - S$$

$$B = \sin 2a + C_m^1 \sin (2a+2b) + C_m^2 (2a+4b) + \ldots + C_m^m \sin (2a+2mb)$$

Inmulţim a doua relaţie cu $i=\sqrt{-1}$ şi obţinem:

$$(2)\quad A+iB=(\cos 2a+i\sin 2a)+C_m^1[\cos(2a+2b)+i\sin(2a+2b)]+C_m^2[\cos(2a+4b)+i\sin(2a+4b)]+\ldots$$
$$\ldots+C_m^m[\cos(2a+2mb)+i\sin(2a+2mb)].$$

Se ştie însă că putem scrie, folosind formula lui MOIVRE

$$\cos(2a+2pb)+i\sin(2a+2pb)=(\cos 2a+i\sin 2a)(\cos 2pb+i\sin 2pb)$$
$$=(\cos 2a+i\sin 2a)\,(\cos 2b+i\sin 2b)^p$$

astfel încât relaţia (2) devine, scoţând pe $(\cos 2a+i\sin 2a)$ factor comun:

$$A+iB=(\cos 2a+i\sin 2a)[1+C_m^1(\cos 2b+i\sin 2b)+C_m^2(\cos 2b+i\sin 2b)^2+\ldots+C_m^m(\cos 2b+i\sin 2b)^m]$$
$$=(\cos 2a+i\sin 2a)\,(1+\cos 2b+i\sin 2b)^m$$

Insă $1+\cos 2b+i\sin 2b=2\cos^2 b+2i\sin b\cos b$

$$=2\cos b\,(\cos b+i\sin b)$$

Inlocuind şi ţinând seamă de formula lui MOIVRE avem:

$$A+iB=2^m\cos^m b\,(\cos 2a+i\sin 2a)\,(\cos mb+i\sin mb)$$
$$\therefore\ A+iB=2^m\cos^m b\,[\cos(2a+mb)+i\sin(2a+mb)].$$

Din egalarea părţilor reale deducem:

$$A=2^m\cos^m b\cos(2a+mb).$$

Atunci (1) se poate scrie

$$S_1+S=2^m\ ;\quad S_1-S=2^m\cos^m b\cos(2a+mb)$$

din care prin scădere şi împărţire cu 2 căpătăm suma cerută:

$$(3)\qquad \boxed{S=2^{m-1}[1-\cos^m b\cos(2a+mb)]}\ .$$

Obs. Prin adunare se găseşte şi suma corespunzătoare cosinusului:

$$S_1=2^{m-1}[1+\cos^m b\cos(2a+mb)].$$

O soluţie bună însă cu rezultat diferit din cauza unor mici greşeli de calcul s'a primit dela d-l AUREL GH. ANDREI (liceul militar, Iaşi).

EXERCIŢII

26. *Care numere de două cifre, ridicate la o putere oarecare, se termină cu ele?*

T. STOICESCU.

R. Cifrele care se termină prin ele la patrat şi la cub sunt 0, 1, 5 şi 6 deci dacă $z < 10$, numerele căutate vor fi de forma $z0$, $z1$, $z5$, $z6$.

Dând lui z toate valorile posibile şi ridicând la patrat, se găseşte că numai 25^2 şi 76^2 se termină respectiv cu 25 şi 76. Se verifică uşor apoi că

$$25^n = (100m + 25)^n \quad \text{şi} \quad 76^n = (100m + 76)^n$$

se termină cu 25 şi 76.

27. *Într'un triunghiu dreptunghiu înălţimea vârfului unghiului drept este simediana dusă din acel vârf, iar celelalte două simediane trec prin mijlocul acelei înălţimi.*

G-L G. I. LIT.

R. Partea întâia e evidentă, datorită egalităţii unghiurilor formate de înălţimea şi mediana, pornite din vârful unghiului drept, cu catetele alăturate; ar x fiind distanţa punctului lui LEMOINE, la ipotenuză avem:

$$x = \frac{2aS'}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2aS}{2a^2} = \frac{S}{a} \quad \therefore \quad S = ax, \quad \text{deci} \quad x = \frac{h_a}{2}.$$

PROBLEME PROPUSE

6092. Să se găsească patratul de şase cifre *abcdef* ştiind că numerele *ab*, *ef* sunt patrate perfecte şi că *cd* este un multiplu al rădăcinilor celor două patrate precedente.

G-L GH. BUICLIU.

6093. Fiind dat un număr, întreg $k > 1$, să se demonstreze că există o infinitate de numere prime p astfel ca intervalul $(kp - k, pk + k)$ să nu conţină niciun număr prim.

TIBERIU POPOVICIU.

6094. In triunghiul ABC se consideră mediana din C şi bisectoarea din B, care se întâlnesc în C_m, mediana din B şi bisectoarea din C, care se întâlnesc în B_m. Dreptele AC_m şi AB_m întâlnesc pe AC în A_1 şi A_1'. Să se demonstreze:

1°. Dreptele analoage cu AA_1, AA_1' concură în punctele M şi M'.

2°. Triunghiurile pedale ale punctelor M şi M' sunt echivalente cu triunghiul pedal al centrului cercului înscris în triunghiul ABC.

3°. Avem relaţiile:

$$ab\,\overline{MA}^2 + bc\,\overline{MB}^2 + ca\,\overline{MC}^2 = (ab^2 + bc^2 + ca^2)\frac{abc}{ab+bc+ac},$$

$$ca\,\overline{M'A}^2 + ab\,\overline{M'B}^2 + bc\,\overline{M'C}^2 = (ac^2 + cb^2 + ba^2)\frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

MARCEL COTARIU.

6095. Fie $A_{11}A_{12}A_{13}$, $A_{21}A_{22}A_{23}$, $A_{31}A_{32}A_{33}$ trei triunghiuri din plan cu vârfurile notate în sensul ciclic pozitiv. Cu $\Omega_i'\,\Omega_i''$ se înseamnă punctele isodinamice ale triunghiului $A_{i1}A_{i2}A_{i3}$ ($i=1,2,3$). Anume, Ω_i' înseamnă punctul isodinamic interior cercului determinat de $A_{i1}A_{i2}A_{i3}$.

Prin Σ_{ij} se notează asemănarea inversă de punct dublu A_{ij} şi de perechi omoloage Ω_i', Ω_i''. Se consideră determinanţii simbolici cu 3 linii şi 3 coloane

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

Să se demonstreze:

1. Cele 9 terne de asemănări reprezentate în determinantul Σ de coloane şi de produsele formale ale desvoltării lui Σ, se bucură de proprietatea de a avea sau nu, în acelaşi timp, câte o pereche comună de puncte omoloage.

2. In cazul când aceste perechi de puncte omoloage există, ele sunt chiar punctele isodinamice corespunzătoare în determinantul A celor 9 terne Σ.

Se cere o demonstraţie elementară a acestor două propoziţii [1]).

D. BARBILIAN.

1) Analiticeşte problema provine din transferarea în real a figurii triunghiurilor de şase ori omologice pentru cazul unui triunghiu de începere complet complex. Cazul când triunghiul de începere e real a fost considerat într'o notă din G. M.

6096. Să se rezolve sistemul:

$$x^2 - yz = A \quad , \quad y^2 - zx = B \quad , \quad z^2 - xy = C.$$

Să se generalizeze şi să se rezolve sistemul generalizat.

N. GEORGESCU ROEGEN.

6097. Să se demonstreze că între unghiurile α, β, γ sub care cercul ABC taie cercurile exînscrise în unghiurile A, B, C şi între elementele triunghiului, avem relaţille:

$$(1) \qquad \frac{1}{r} + \frac{\cos\alpha}{r_a} + \frac{\cos\beta}{r_b} + \frac{\cos\gamma}{r_c} = \frac{3}{2R},$$

$$(2) \qquad \sec^2\frac{\alpha}{2} + \sec^2\frac{\beta}{2} + \sec^2\frac{\gamma}{2} = \frac{4R}{r}.$$

CPT. AURELIAN I. STAN.

6098. Dacă seria cu termenul general pozitiv u_n este divergentă şi dacă expresia

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \log u_n$$

tinde către o limită, când n tinde către infinit, expresiile

$$\sin u_0 + \sin u_1 + \ldots + \sin u_n + \log \sin u_n$$
$$\operatorname{tg} u_0 + \operatorname{tg} u_1 + \ldots + \operatorname{tg} u_n + \log \operatorname{tg} u_n$$

vor tinde de asemenea către limite finite.

M. GHERMĂNESCU.

6099. Să se studieze şi să se reprezinte grafic curba a cărei ecuaţie, faţă de un sistem de axe dreptunghiulare, este

$$(x+1)(y+1)(x+y) - xy = 0.$$

GH. D. SIMIONESCU.

6100. α fiind real şi pozitiv, iar p întreg şi pozitiv, să se arate că avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\alpha\cos t}\cos(pt - \alpha\sin t)\,dt = \frac{\alpha^p}{p!}.$$

ŞERBAN GHEORGHIU.

ERATĂ. In primul rând al soluţiei exerciţiului 6 dela pag. 164 se înlocueşte *« distanţa dela ortocentru la latura a ... »* prin *« distanţa dela centrul cercului circumscris la latura a ... »*.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Alexa Gh. Adrian (5632, 950, 6007); *Barbu A. I.* (5878, 84, 911, 53, 6036, 67, E, R); *Bărbulescu Fl.* (A); *Bărbulescu C. V.* (5950, 6006, 46, 51); *Berdan C.* (6090); *Bodnărescu H.* (P); *Braşoveanu D. Gh.* (5926, 38, 66, 6002, 36, 47, 66); *Cantuniar Cr.* (5913, 6043, 44); *Cârstea D. M.* (6066); *Chirculescu Al.* (5908); *Chiriţă S. I.* (6046); *Ciobanu D. Dan* (6047); *Ciobotă Tr.* (6031, 47); *Ciumaşu Viorel* (6039); *Ciureanu G. C.* (6015, 43); *Cocea Gh. Th.* (P); *Cohn A. Ionel* (6017, 87, E, P); *Columbeanu D. P.* (6067, 84, 86, 87); *Constantinescu R. M.* (5882, 917, 39, 41, 6077, 82); *Corduneanu C.* (6046); *Cotariu Marcel* (6086, 87, 88, 89); *Damian N. Şt.* (6013, 15, 27, 39, 44, 46, 67, 71); *Diaconu C. C.* (5898, 926); *Diaconu Gh.* (6039); *Drăghicescu P. C.* (6036, 46); *Dumitrescu Val.* (6015, 46, 47); *Filimon Fl. I.* (5954, 66); *Filip V. I.* (6036, 46); *Florescu B. I.* (A, N); *Goldiş Th. Gh.* (N); *Gongu I. R.* (6046); *Grigore A. Gh.* (3983, 5861, 912, 6036, 66, 67, 83, E, R); *Huideş V. Al.* (6015, 46); *Iacob St. E.* Maior (5475, 966, 6047, E, P); *Ieşan St. Al.* (6083, 86, 89); *Iliescu C. C.* (6046, 47); *Leon A. M.* (6086); *Mardare M.* (6046); *Marinescu E. E.* (5957, 91, 93, 95, P); *Melinte N. Liviu* (6046); *Mihăilescu I. Şt.* (6043); *Minculescu Al.* (5907, 21, 6015, 27, 33, 36, 43, 44, 46, 47, 49, 55, 65, 67, 73, 82, E); *Moraite G. Al.* (6086); *Mustăcescu V. Tr.* (5973, 6044, 83); *Nache D. D.* (6015, 21, 36, 43, 46, 47, 67); *Nedelcu Gh. Ulpius* (5940, 6043, 47); *Paraschivescu C. Marcel* (6047); *Petculescu D. M.* (5488, 609, 898, 916, 26, 6015); *Pitigoi G. V.* (5957); *Popescu I. B.* (5871, 930, 6039, 41, 43); *Popescu V. I.* (6027, 47); *Rogoz V. I.* (5475, 632, 950, 54, 66, 6047); *Rosenrauch E. P.* (6002); *Şerban C. N.* (6036, 39, 43); *Sintescu V. M.* (6047); *Slăvescu V. M.* (6046, 82); *Soare V. M.* (5861, 6036, 47, 83, 84, 87); *Staicu I. C.* (6086, 87, 89, E); *Stan G. C.* (6036, 46); *Stancu Al.* (6047); *Teodorescu A. Al.* (5959); *Teodorescu C. C.* (6013, 41, 43, 80); *Teodorescu G. V.* (6027, 93); *Ticea I. Gh.* (6041); *Tofan C. Aurel* (6015, 36, 43, 46); *Toma G. Oct.* (6036, 46); *Timotin Al. A.* (5864, 70, 98, 919, 34, 64, 66, 72, 76, 85, 6046, 52, 53, 58); *Tincu C. C.* (5707, 924, 54, 56, 6002, 05, 43, 47); *Vlad Mircea* (6015, 21, 36, 43, 47); *Vlasie M. Gh.* (6066); *Wegener E.* (3939, 4251, 745, 801, 25, 6013, 84, 89, P); *Zaharia M. Rosalia* (6043).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XVI şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 400

XX. **I. I Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI–XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . Lei 600

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 1.185.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 9. — MAI 1945

SUMARUL

1. O scrisoare dela D-l Tancred Constantinescu . . . . . *Gazeta Matematică.*
2. Relaţii matematice în studiul răsturnării brazdei de către plug . *Radu Bădescu şi Florea Bărbulescu.*
3. Premiul „Inginer H. Capriel" . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
4. Raport pentru acordarea premiului de Algebră (A. G. Ioachimescu) . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. **Note matematice:** 25—26.
6. Chestiuni de examen.
7. **Bibliografie.**
8. Cereri.
9. Diverse.
10. **Probleme rezolvate:** 1656, 2381, 3360, 5815, 5827, 5898, 6002.
11. **Exerciţii:** 28—29.
12. **Probleme propuse:** 6101 — 6110.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1945

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici, Directorul Statisticei Financiare; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6006, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 7100, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133.

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 400

O SCRISOARE
DELA D-L TANCRED CONSTANTINESCU

Colegul de societate şi membrul fondator D-l Inginer Inspector general TANCRED CONSTANTINESCU ne-a trimis următoarea scrisoare cu data de 26 Martie 1945.

Onor.

DELEGAŢIEI „GAZETEI MATEMATICE"

Loco.

Domnilor Membri,

Referindu-mă la scrisoarea Dv. Nr. 24 din 12 Martie, am onoare a vă face cunoscut că în acest an voiu contribui cu suma de 20.000 lei peste cotizaţia normală. Vă remit un cec pentru suma de 26.000 lei.

Impreună cu vechiul meu prieten IONESCU ION, *am rămas singurii în viaţă dintre întemeetorii* Gazetei Matematice. *Şi dacă, pentru a continua să apară, va trebui să fac orice sacrificiu, îl voiu face.*

Ocupaţiunile mele, mai cu seamă cele din ultimii 30 ani, iar acum vârsta mea şi grijile ce comportă, m'au împiedecat dela o activitate mai însemnată la Gazeta *noastră, aşa cum aş fi dorit. Dar nimic nu mi-a putut înstrăina sufletul dela această operă creată de câţiva tineri dintr'o epocă mai fericită, operă care a dat roade atât de frumoase pentru pregătirea generaţiunilor tinere.*

Cu cele mai alese sentimente,

T. CONSTANTINESCU.

Cu Cecul Nr. 115.702 al B. Românesti.

In al 50-lea an de apariţie a revistei *Gazeta Matematică* mai avem între noi numai pe doi din membrii ei fondatori, pe D-l TANCRED CONSTANTINESCU şi pe D-l ION IONESCU. Corespondenţii noştrii de azi nu au toţi la îndemână primele volume ale revistei pentru a vedea colaborarea pe care i-a dat-o pe

vremuri D-l TANCRED CONSTANTINESCU şi nu cunosc sprijinul D-sale material în diferite împrejurări, în special donarea parcelei pe care se află clădit localul societăţii [1]). Vor aprecia însă din rândurile scrisoarii de mai sus, spiritul de jertfă care a domnit dela înfiinţarea revistei şi până azi şi devotamentul pe care i-l păstrează iniţiatorii ei. Actualii membri, acei care ne-am luat sarcina să le continuăm opera lor, operă care a devenit un important factor social, vom şti să folosim imboldul pe care ni-l dă scrisoarea D-lui TANCRED CONSTANTINESCU pentru a continua să pregătim generaţiile tinere pe terenul ştiinţific şi moral spre binele lor şi al ţării.

GAZETA MATEMATICĂ.

RELAŢII MATEMATICE IN STUDIUL RĂSTURNĂRII BRAZDEI DE CĂTRE PLUG

Plugul este una din maşinile-unelţă a cărei evoluţie a fost determinată în cea mai mare măsură de experienţele practice făcute de om, la construirea lui consideraţiile teoretice având, până în ultimele timpuri, o contribuţie aproape nulă. Şi totuşi, un studiu matematic si mecanic poate aduce, dacă nu unele îmbunătăţiri, cu siguranţă justificările riguroase adoptării în practică a unor rezultate obţinute în mod empiric.

Primul pas în acest studiu îl constitue examinarea configuraţiilor rezultate prin răsturnarea brazdelor care au fost tăiate de fierul lung al plugului şi apoi împinse de cormană astfel ca partea internă a brazdei să vină la suprafaţa solului. Proprietăţile geometrice şi mecanice ale acestor configuraţii ne conduc la o serie de probleme care prezintă aspecte destul de interesante pentru cititorii *Gazetei Matematice.*

Brazda este asimilată unei prisme drepte [2]), de secţiune transversală dreptunghiul ABCD, a cărei bază, segmentul $b = AD$,

1) A se vedea cuvântarea D-lui G-L GH. BUICLIU publicată la pag. 253, Vol. XL.

2) In timpul răsturnării, muchiile D şi C ale brazdei se deformează mai mult sau mai puţin; un studiu aprofundat al răsturnării brazdei va trebui să ţină seamă de aceste modificări.

este tăiată de fierul lung. Vom nota cu h adâncimea arăturii, care este reprezentată prin latura AB.

In urma acțiunii plugului, brazda se rotește întâiu în jurul punctului D până ce ia poziția $A_0 B_0 C_0 D_0$, apoi în jurul punctului C_0 până ce se reazimă pe brazda precedentă $A_2 B_2 C_2 D_2$, rămânând astfel înclinată de unghiul β față de planul orizontal. Se obține în acest mod poziția $A_1 B_1 C_1 D_1$, pentru care suprafețele $C_1 B_1$ și $D_2 A_2$ au toată porțiunea $D_2 B_1$ comună.

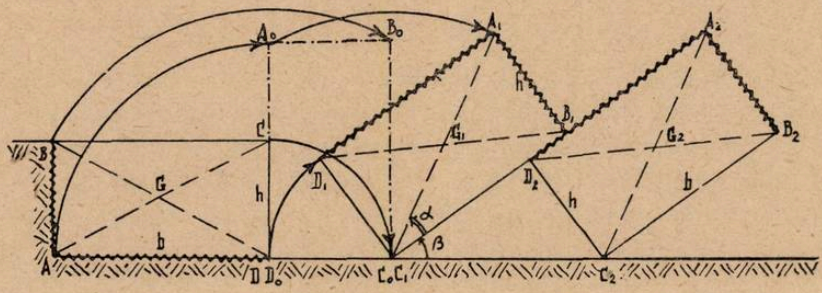


Fig. 1.

Prima problemă care se pune este aceea a uniformității arăturii, care se traduce prin condiția ca suprafața *inițială* ocupată de n brazde să fie egală, *oricare ar fi* **n**, cu suprafața *acoperită* după răsturnare de aceste n brazde. Cum suprafața inițială este egală cu $n.\ b.\ L$, unde L este lungimea unei arături, iar suprafața acoperită este de n ori lungimea $C_1 C_2$, [1]) înmulțită cu L, găsim

$$(1) \qquad C_1 C_2 = b$$

condiția de uniformitate a arăturii.

O consecință a acestei relații este legătura dintre unghiul β care definește înclinarea brazdei și unghiul α care fixează poziția centrului de gravitate G_1 al dreptunghiului $A_1 B_1 C_1 D_1$, punct ce se găsește la intersecția diagonalelor lui. Presupunând brazda omogenă [2]) G_1 va fi tocmai proiecția ortogonală a centrului de gravitate al brazdei pe planul secțiunii transversale făcute.

1) Suprafața acoperită e de fapt $(C_1 C_2 + C_2 C_3 + \ldots + C_n C_{n+1}) . L$. Scriind condiția respectivă pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$, se obțin pe rând $C_1 C_2 = b$, $C_2 C_3 = b$, etc.

2) Brazda însă nu este omogenă. Pentru determinarea lui G sunt necesare studii pe teren care nu intră însă în cadrul problemei noastre.

Din triunghiul dreptunghic $C_1 D_2 C_2$ avem

$$\frac{h}{b} = \sin\beta, \tag{2}$$

iar din triunghiul dreptunghic $B_1 A_1 C_1$

$$\frac{h}{b} = \operatorname{tg}\alpha \tag{3}$$

astfel că relaţia căutată va fi

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\alpha. \tag{4}$$

A doua problemă este relativă la stabilitatea brazdei, care va fi asigurată, brazda rămânând în poziţia din Fig. 1, dacă verticala centrului de gravitate G_1 va înţepa planul orizontal AD la dreapta punctului de sprijin C_1. In ipoteza contrarie, e clar că brazda va reveni în poziţia iniţială ABCD, după trecerea plugului, numai sub acţiunea greutăţii ei proprii.

Pentru a scrie condiţia menţionată, vom calcula coeficientul unghiular tg $(\alpha+\beta)$ al dreptei $C_1 G_1$ şi vom examina cazul când el este pozitiv, condiţie echivalentă inegalităţii $\alpha+\beta < 90^0$. Cum ţinând seamă de (4), avem

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\beta+\operatorname{tg}\beta}{1-\sin\beta\,.\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\beta\,(1+\cos\beta)}{\cos\beta-\sin^2\beta}$$

vom putea scrie condiţia precedentă sub forma

$$\frac{\sin\beta\,(1+\cos\beta)}{\cos\beta-\sin^2\beta} > 0$$

sau

$$\frac{\sin\beta\,(1+\cos\beta)}{\cos^2\beta+\cos\beta-1} > 0. \tag{5}$$

Polinomul dela numitor este de gradul II în $\cos\beta$ şi are rădăcinile

$$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

astfel că se va descompune în doi factori de gradul I în $\cos\beta$

$$\left(\cos\beta+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\cos\beta-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Inegalitatea (5) se va scrie atunci

$$(6) \qquad \frac{4\sin\beta\,(1+\cos\beta)}{(2\cos\beta+\sqrt{5}+1)\,(2\cos\beta-\sqrt{5}+1)} > 0$$

şi, cum β este prin ipoteză cuprins între 0^0 şi 90^0, toţi factorii vor fi pozitivi afară de ultimul dela numitor, care ne va da condiţia

$$(7) \qquad \cos\beta > \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618 \cong \cos\ 52^0$$

echivalentă inegalităţii

$$\beta < 52^0.$$

Unii autori introduc însă raportul $\frac{b}{h} = k$ dintre lăţimea de lucru b a plugului şi adâncimea h a arăturii, raport care după relaţia (2) este egal cu $\frac{1}{\sin\beta} = \text{cosec}\beta$. Cunoaşterea lui permite determinarea înclinării brazdelor în cazul când acestea se răstoarnă ca în Fig. 1.

Condiţia ca brazda să nu se răstoarne în poziţia iniţială ABCD după trecerea plugului, devine atunci

$$(8) \qquad k > \text{cosec}\ 52^0 = 1{,}27,$$

astfel că acest parametru nu poate lua valori mai mici decât 1,27 fără ca stabilitatea brazdelor să fie periclitată.

Constructorii de pluguri adoptă în general pentru k valori mai mari ca 1,27 şi, dacă se întâmplă ca unele firme să dea valori inferioare lui 1,27, plugurile respective servesc numai la desfundatul terenului, brazdele căzând la loc după trecerea plugului.

Teoretic, parametrul k poate lua valori oricât de mari am vrea; practic, acest lucru nu este însă posibil căci brazda, fiind destul de uşor deformabilă, trebue să aibă o suprafaţă de sprijin pe brazda precedentă suficient de mare pentru a asigura stabilitatea întregii configuraţii 1. Suprafaţa de sprijin menţionată se proiectează după segmentul D_2B_1, astfel că acesta nu va putea scoborî sub o anumită limită fără ca întreaga muchie B_1 să se rupă iar brazda să cadă în şanţul vecin brazdei $A_2B_2C_2D_2$ [$\beta = 0$].

Pentru terenurile compacte, îmbibate de apă, segmentul $D_2 B_1$ poate fi cel puţin egal cu a şasea parte din latura $B_1 C_1 = b$, şi cum

$$B_1 D_2 = B_1 C_1 - C_1 D_2 = b\,(1 - \cos\beta)$$

condiţia aceasta se va scrie

$$b\,(1 - \cos\beta) > \frac{b}{6} \quad \text{sau} \quad \cos\beta < \frac{5}{6}.$$

Ea este echivalentă uneia oarecare dintre inegalităţile

$$\sin\beta > 0{,}552 \quad , \quad \beta > 33^0\,30' \quad , \quad k < 1{,}8,$$

astfel că stabilitatea brazdelor unei arături va fi caracterizată prin inegalităţile în k

$$1{,}27 < k < 1{,}8 \tag{9}$$

unghiul de înclinare β al acestora variind între $33^0\,30'$ şi 52^0.

Rezultatele acestea sunt de acord cu cele indicate de literatura de specialitate. Astfel, KRAMARENKO preconizează pentru solurile uşoare $k = 1{,}5$, *pentru solurile mijlocii* $k = 1{,}6$, iar pentru cele grele dela 1,7 la 1,8 [1]).

GOREACIKIN găseşte şi el prin consideraţii elementare limita inferioară 1,27 pentru k.

Pentru valorile lui k ce depăşesc 1,8, e nevoie să se ia o lăţime de lucru mare, 25—30 cm, şi o adâncime mică, 8—12 cm, astfel că operaţia corespunzătoare e mai mult o scormonire, o mobilizare a solului.

O a treia problemă care ridică o serie de chestiuni teoretice şi practice, unele mai interesante decât altele, este aceea a echilibrului brazdei în poziţia din Fig. 2. Presupunând brazda nedeformabilă, să descompunem greutatea ei P, aplicată în G_1, după direcţia $C_1 G_1$ şi după dreapta ce uneşte pe G_1 cu mijlocul segmentului $D_2 B_1$, *direcţie care e orizontală*. D-l Ing. I. GR. POPESCU ne-a comunicat o demonstraţie simplă a acestei proprietăţi. Dreapta $G_1 M$ uneşte mijloacele segmentelor $D_1 B_1$ şi $D_2 B_1$, aşa că ea este paralelă cu dreapta $D_1 D_2$, baza triunghiului $D_1 B_1 D_2$.

---

1) Solurile uşor legate au mai mult de 70% nisip, iar restul argilă. Solurile mijlocii au până la 70% argilă şi restul nisip, iar solurile grele şi foarte grele merg până la a nu avea deloc nisip. Conţinutul în apă şi mâl joacă şi el un rol în clasificarea modernă a solurilor, însă acest fel de a le împărţi nu are nici o importanţă aici.

Segmentele C_1D_1 şi C_2D_2 fiind egale şi paralele, figura $C_1D_1C_2D_2$ e un paralelogram, aşa că laturile C_1C_2 şi D_1D_2 sunt paralele. Rezultă de aici că direcţia G_1M este orizontală.

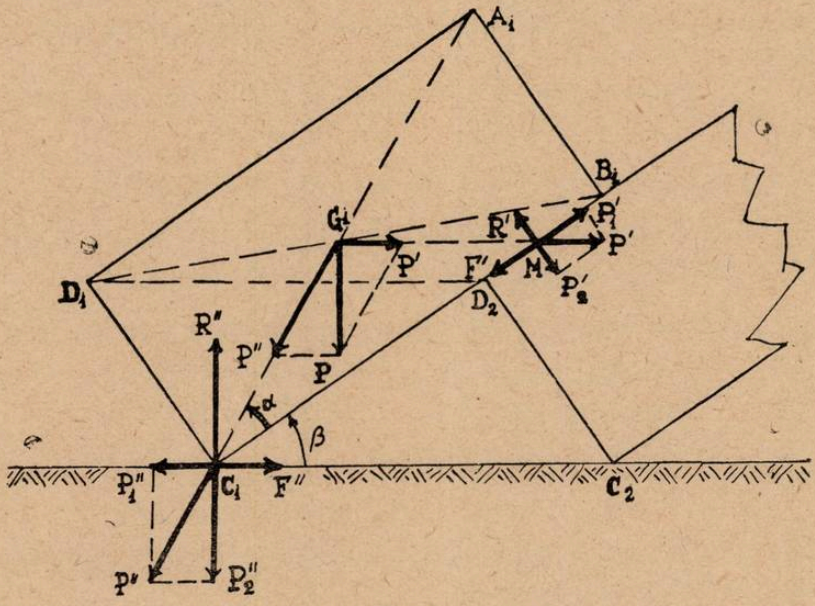


Fig. 2.

Cele două componente P' şi P'' sunt date de relaţiile

$$(10)\quad P' = P \cdot \operatorname{cotg}(\alpha + \beta)\ ,\quad P'' = \frac{P}{\sin(\alpha + \beta)}$$

deduse din triunghiul dreptunghic PG_1P'. Ele pot fi deplasate în punctele M şi C_1, şi aici o descompunere după suprafaţa de contact a brazdelor sau după sol, şi după normalele la aceste suprafeţe, ne va conduce la componentele respective P_1' şi P_2', P_1'' şi P_2'', date de relaţiile

$$(11)\quad P_1' = P'\cos\beta = P\frac{\cos\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}\ ,\quad P_2' = P\frac{\sin\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)},$$

$$P_1'' = P''\cos(\alpha + \beta) = P\operatorname{cotg}(\alpha + \beta)\ ,\quad P_2'' = P''\sin(\alpha + \beta) = P.$$

Forţele P_1' şi P_1'' vor tinde să rupă brazda între C_1 şi D_2, căci din acţiunea forţei P rezultă o încovoiere a acesteia, forţele

menţionate nefiind stânjenite decât de forţele de frecare F' dintre cele două brazde vecine, şi F'' dintre brazdă şi sol. Componentele P_2' şi P_2'' însă vor căuta să deformeze brazdele,[1] — în special P_2'' care va rupe muchia C_1, — şi astfel vor determina două reacţiuni R' şi R'', teoretic egale şi direct opuse acestor două forţe.

Să scriem condiţiile de echilibru ale punctelor M şi C_1, punând

$$F' = f P_2' \quad , \quad P'' = f'' P_2''$$

unde f' şi f'' sunt coeficienţii de frecare corespunzători[2]).

$$(12) \quad M \begin{cases} F' \geqslant P_1' = P.\cos\beta.\operatorname{cotg}(\alpha+\beta), \\ R' = P_2' = P.\sin\beta.\operatorname{cotg}(\alpha+\beta), \end{cases} \quad C_1 \begin{cases} F'' \geqslant P_1'' = P.\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) \\ R'' = P_2'' = P, \end{cases}$$

sau, înlocuind forţele F' şi F'' prin expresiile lor în funcţie de P,

$$f' P \sin\beta \operatorname{cotg}(\alpha+\beta) \geqslant P \cos\beta . \operatorname{cotg}(\alpha+\beta)$$

$$f'' P \geqslant P \operatorname{cotg}(\alpha+\beta),$$

şi simplificându-le, găsim inegalităţile

$$(13) \quad f' = \operatorname{tg}\varphi' \geqslant \operatorname{cotg}\beta \quad , \quad f'' = \operatorname{tg}\varphi'' \geqslant \operatorname{cotg}(\alpha+\beta),$$

unde φ' şi φ'' sunt unghiurile de frecare[3]). Aceste două inegalităţi sunt echivalente următoarelor

$$(14) \quad \varphi' > 90^0 - \beta, \quad \text{şi} \quad \varphi'' > 90^0 - (\alpha+\beta)$$

şi, cum din prima se scoate o limită inferioară pentru β,

$$\beta > 90^0 - \varphi',$$

această valoare trebue să fie mai mică decât maximul lui β, adică 52^0. Deducem atunci că $\varphi' > 90^0 - 52^0 = 38^0$, astfel că *$f'$ coeficientul de frecare corespunzător suprafeţelor comune celor două brazde, trebue să fie mai mare decât* $tg\, 38^0 = 0{,}78$. Dacă această condiţie este satisfăcută, în afară de faptul că ambele colţuri D_2 şi B_1

---

1) Presiunea P_2' se va distribui în mod uniform pe întreaga suprafaţă D_2B_1.

2) Se ştie că forţele de frecare sunt proporţionale cu presiunile normale corespunzătoare. Şi aici trebuesc făcute multe determinări şi măsurători pe teren pentru a studia aprofundat frecarea dintre brazde.

3) Aceste unghiuri ar trebui de fapt să fie egale. In această ipoteză, singura condiţie ce rămâne este prima inegalitate (14) care este mai restrictivă decât a doua.

se pot rupe, suprafaţa de sprijin D_2B_1 fiind prea mică, se mai poate rupe şi brazda între D_2 şi C_1 căci forţa P_1' e mai mare decât forţa de frecare F'. Această circumstanţă survine în special când forţa de frecare F'' este suficient de mare pentru a ţine pe loc punctul C_1, adică în cazul când numai a doua inegalitate (14) este satisfăcută.

Concluziile acestui din urmă studiu rămân să fie verificate prin măsurători pe teren şi printr'o aprofundare a tuturor chestiunilor ridicate prin cercetarea teoretică făcută. Vom expune cu alt prilej o discuţie mai amplă a acestor chestiuni, discuţie care să fie făcută şi în lumina consideraţiilor agrologice ce determină condiţiile unei bune arături.

RADU BĂDESCU şi FLOREA BĂRBULESCU.

PREMIUL „INGINER H. CAPRIEL"

In anul 1949 *Gazeta Matematică* va acorda premiul Ing. H. CAPRIEL în valoare de 20.000 de lei pentru cea mai bună lucrare care se va trimite în manuscris Delegaţiei Societăţii până la 1 Mai 1949, asupra subiectului dat mai jos.

Candidaţii pot fi studenţi ai Universităţilor, Şcoalelor Politehnice sau Şcoalelor Militare din ţară [1]).

SUBIECTUL PROPUS

In Algebra Axiomatică se întâlnesc următoarele două teoreme ale lui MACLAGAN WEDDERBURN:

α) Un inel simplu cu element-unitate, e isomorf cu un inel complet de matrice peste un corp (în general necomutativ). (16).

1) Comisia de premiu a hotărît să extindă, în mod oficios, cercul concurenţilor: dela cei prevăzuţi în regulamentul premiului CAPRIEL (singuri premiabili în cadrul *Gazetei Matematice)*, la licenţiaţi, profesori secundari, ingineri.

După întinderea şi importanţa lucrărilor primite dela acest grup de concurenţi, se va căuta să se obţină premierea lor în cadrul Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti, printr'un raport care va fi întocmit la vreme. Unele din aceste lucrări pot servi ca puncte de plecare pentru eventuale teze de doctorat.

β) Corpurile finite sunt comutative (2), (15), (17).

Se cere extinderea acestor teoreme, anume: pentru teorema α, în direcţia inelelor cu element-unitate şi limitare maximală şi minimală a idealelor (stângi); pentru teorema β în direcţia grupurilor cu un domeniu de operatori.

INDICAŢII

Pentru îndrumarea cercetării, dar fără a o îngrădi, prin aceasta, mai mult decât o precisează însăşi formularea de mai sus a subiectului, dăm următoarele lămuriri:

α) Numim algebră (sistem de numere ipercomplexe) W sistemul de mărimi algebrice provenit dintr'o algebră obişnuită prin înlocuirea câmpului (corp comutativ) cu un corp arbitrar.

O generalizare a problemei ridicate de teorema α ar fi următoarea: *în ce fel trebue întărită definiţia axiomatică a unui inel cu element unitate* $\mathfrak{O}$, *ca el să devină isoform cu o algebră* W?

Adoptând ipoteza lui ARTIN (1) anume: limitarea maximală şi minimală a idealelor (stângi) pentru $\mathfrak{O}$, facem un prim pas în această direcţie. Intr'adevăr, $\mathfrak{O}$ capătă, prin aceasta, un radical R iar inelul claselor de resturi $\mathfrak{O}/R$ devine o sumă directă de inele simple.

In acest sens se cuvine deci să fie căutată generalizarea teoremei α. Inelele finite, cu element-unitate satisfac condiţiei lui ARTIN, încât cercetătorul ar putea că se mărginească foarte bine numai la acestea. Ceva mai mult: după o teoremă a lui KENJIRO SHODA (13) inelul finit poate fi presupus un „p-inel" (un inel cu element unitate care conţine p^r elemente, p prim), căci inelele finite cu element-unitate sunt sume directe de p-inele.

O metodă de cercetare apropiată a isomorfismului cerut, între un inel finit $\mathfrak{O}$ cu element-unitate şi o algebră W, constă în punerea grupului unităţilor (grupului multiplicativ) din $\mathfrak{O}$ în primul plan al discuţiei şi adâncirea paralelismului schiţat de K. SHODA (13) între proprietăţile lui şi proprietăţile inelului.

Acest paralelism se poate urmări, mai ales, în direcţia radicalului (resolubil respectiv nilpotept) al grupului (7) şi radicalul lui $\mathfrak{O}$.

β) De curând s'au obţinut două rezultate care pot fi privite ca analogoni aditivi ai teormei β.

β_1 Grupurile regulate [1]), finite sunt comutative.

β_2 Grupurile regulate libere, a căror definiţie nu exclude grupurile regulate comutative, sunt comutative.

Se cer alţi analogoni, aditivi sau multiplicativi, la pseudoinele sau, mai general, la grupurile cu un domeniu de operatori [2]).

COMISIA DE PREMII
Prof. D. BARBILIAN, Prof. AL. PANTAZI,
Prof. P. SERGESCU.

---

1) Un grup cu automorfisme simplu transitive, formând un grup se numeşte grup regulat. Proporţiile β_1, β_2 sunt cuprinse într'o notă: Intemeierea axiomatică a Domeniilor algebrice olonome, care va apare în *Buletinul Ştiinţific al Academiei Române.*

2) *Literatură:*

(1). ARTIN E. *Zur Theorie der Hyperkomplexen Zahlen.* Hamburger Abhandlungen, 5. 1928,

(2). *Uebereinen Satz von Herrn* J. H. M. WEDDERBURN. Hamburger Abhandlungen, 5. 1928.

(3). BRAUER R. *Über die algebraische Structur von Schiefkopern.* Jurnal fur reine und angewandte Math. 166. 1932.

(4). *Über die Kostruktion der Schiefkörper,* die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zeutrum sind J. fur Math. 168. 1933.

(5). DICKSON L. E. *On finite algebras.* Göttinger Nachrichten, 1905.

(6). FITTING H. *Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutative Gruppen.* Mathematische Annalen, 107. 1932.

(7). *Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung.* Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinigung, 485–8. 1938.

(8). KODAIRA K. *Ueber die Struktur des endlichen, vollständig primaren Ringes mit verschwindenden Radikalquadrat.* Jap. Jurnal, 14. 1937.

(9). KRULL W. *Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen. Mathematische Zeitschrift.* 23. 1925.

(10). *Theorie und Anwendungen der verallgemeinerten Abelschen Gruppen.* Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie. 1926.

(11). RUSAM F. *Matrizenringe mit Koeffizienten und endlichen Ringen ganzen Zahlen.* Lucrare de doctorat la Universitatea din Erlangen. 1931.

(12). SHODA K. *Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe.* Math. Ann. 100. 1928.

(13). *Über die Einheitengruppe eines endlichen Ringes.*

(14). VANDIVER H. S. *Note on an associative distributive Algebra in which the commutative larv of addition does not hold.* American Mathematical Society. Bull. 42. 1936.

(15). J. H. M. WEDDERBURN. *A theorem on finite algebras.* American Math. Society. Transaction. 6. 1905.

(16). *On hyperkomplex numbers.* London Math. Soc. Proceedings. 6. 1907, 1908.

(17). WITT E. *Über die Kommutativität endlicher.* Schiefkorper. Gott. Nachr. 1931.

RAPORT PENTRU ACORDAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ (A. G. IOACHIMESCU)

Subsemnaţii, membri în Comisiunea pentru acordarea premiului de Algebră (A. G. IOACHIMESCU) cercetând activitatea din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX a corespondenţilor elevi de liceu, am constatat că niciunul nu a publicat articole, note sau probleme propuse.

Cercetând apoi soluţiile problemelor de Algebră publicate în acelaşi volum, cu satisfacţie am găsit printre rezolvitori şi mai mulţi elevi de liceu, dintre cari D-l MARCEL D. COTARIU a soluţionat cele mai multe probleme (7).

De altfel D-sa desfăşoară o activitate bogată şi la alte reviste de matematici.

In consecinţă, Comisiunea propune a se acorda premiul de Algebră (A. G. Ioachimescu) D-lui MARCEL D. COTARIU (Brăila).

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI DE ALGEBRĂ (A. G. IOACHIMESCU)

V. ALACI, TH. ANGHELUŢĂ, AL. BUNESCU.

Acest raport a fost aprobat de Adunarea generală din 19 Februarie 1945.

NOTE MATEMATICE

25. *Asupra notei 32 din G. M., XLVIII — 262.* D-l I. B. FLORESCU ne atrage, cu drept cuvânt, atenţia că nu putem avea oricând:

$$I_{A \to 2A}(N) \leqslant I_{1 \to A}(N)$$

In adevăr aşa este. Ulterior însă, în broşura „*Teoria Indicatorilor*" şi într'un memoriu prezentat Academiei Române de către D-l Profesor POMPEIU am arătat că:

$$I_{A \to 2A}[2.3.5.7\ldots(\sqrt{2A})] \leqslant \nu + I_{1 \to A}[2.3.5.7\ldots(\sqrt{2A})]$$

unde ν reprezintă numărul numerelor prime din paranteză.

I. L.

26. *Notă despre centrele izodinamice.* Folosind coordonatele tripolare, regăsesc unele rezultate în legătură cu centrele izodinamice W′ şi W″ ale unui triunghiu ABC.

1°. Ecuaţia tripolară a dreptei W′W″—dreapta lui BROCARD — este:

$$a^2(b^2-c^2)p^2+b^2(c^2-a^2)q^2+c^2(a^2-b^2)r^2=0,$$

unde a, b, c sunt laturile triunghiului ABC, iar p, q, r coordonatele tripolare ale unui punct oarecare al dreptei W′W″.

De asemenea, ecuaţia cercului lui APOLLONIUS relativ la latura BC este:

$$b^2q^2-c^2r^2=0.$$

Urmează că, Ω_a fiind centrul şi ρ_a raza, avem:

$$\overline{A\Omega_a}=\rho_a=\frac{abc}{|b^2-c^2|},\quad \overline{B\Omega_a}=\frac{ac^2}{|b^2-c^2|},\quad \overline{C\Omega_a}=\frac{ab^2}{|b^2-c^2|},$$

astfel încât distanţa lui Ω_a la dreapta W′W″ este:

$$d_a=\frac{\left|a^2(b^2-c^2)\cdot\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2}+b^2(c^2-a^2)\cdot\frac{a^2c^4}{(b^2-c^2)^2}+c^2(a^2-b^2)\cdot\frac{a^2b^4}{(b^2-c^2)^2}\right|}{2\sqrt{-a^2b^2c^2\Sigma(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}=$$

(1)

$$=\left|\frac{2a^2-b^2-c^2}{b^2-c^2}\right|\cdot\frac{abc}{2\sqrt{\Sigma a^4-\Sigma b^2c^2}}.$$

Rezultă:

$$\left(\frac{\overline{W'W''}}{2}\right)^2=\rho_a^2-d_a^2=\frac{a^2b^2c^2}{(b^2-c^2)^2}-\frac{a^2b^2c^2(2a^2-b^2-c^2)^2}{4(b^2-c^2)^2(\Sigma a^4-\Sigma b^2c^2)},$$

de unde:

$$\overline{W'W''}=\frac{abc\sqrt{3}}{\sqrt{\Sigma a^4-\Sigma b^2c^2}}.$$

sau încă:

$$\overline{W'W''}=\frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega-3}},$$

unde R este raza cercului circumscris, iar ω unghiul lui BROCARD al triunghiului ABC.

Observare. Din (1) se vede că, *dacă triunghiul* ABC *este automedian, cu* BC *ca latură mijlocie, dreapta lui* BROCARD *trece prin centrul cercului lui* APOLLONIUS *relativ la latura* BC.

2°. Putem calcula distanţele OW' şi OW".

Punctele W' şi W" fiind inverse faţă de cercul (O), circumscris triunghiului ABC, avem:

$$\overline{OW'} \cdot \overline{OW''} = R^2.$$

Deducem:

$$\overline{OW'} = \frac{1}{2}\left(-\overline{W'W''} + \sqrt{\overline{W'W''^2} + 4R^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}} + \sqrt{\frac{12R^2}{\operatorname{cotg}^2\omega - 3} + 4R^2}\right) = R \cdot \frac{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}} =$$

$$= R \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}{\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3}}}.$$

In definitiv avem:

$$\overline{OW'} = R\sqrt{\frac{\sin(30^0 - \omega)}{\sin(30^0 + \omega)}}, \tag{2}$$

deci şi:

$$\overline{OW''} = R\sqrt{\frac{\sin(30^0 + \omega)}{\sin(30^0 - \omega)}}. \tag{3}$$

Urmează că putem enunţa:

Locul centrelor izodinamice ale triunghiurilor echibrocardiene înscrise într'un cerc (O), *de rază* R, *sunt două cercuri concentrice cu* (O), *ale căror raze sunt date de* (2) *şi* (3).

3°. Să calculăm *distanţele tripolare* ale centrelor izodinamice.

Aceste distanţe tripolare sunt de forma:

$$p = \lambda \cdot \frac{1}{a}\ ,\quad q = \lambda \cdot \frac{1}{b}\ ,\quad r = \lambda \cdot \frac{1}{c}\cdot$$

Determinăm pe λ scriind că p, q, r verifică relaţia:

$$\Sigma a^2p^4 - \Sigma(-a^2+b^2+c^2)q^2r^2 - \Sigma a^2(-a^2+b^2+c^2)p^2 + a^2b^2c^2 = 0.$$

Găsim ecuaţia:

$$(\Sigma a^4 - \Sigma b^2c^2) \cdot \lambda^4 - a^2b^2c^2 \Sigma a^2 \cdot \lambda^2 + a^4b^4c^4 = 0.$$

Rezolvând-o în raport cu λ^2, obţinem:

$$\lambda^2 = \frac{a^2b^2c^2\,(\Sigma a^2 \pm 4\sqrt{3}.S)}{\Sigma\,(b^2-c^2)^2},$$

unde S este aria triunghiului ABC.

Deducem:

$$a.\overline{AW'} = b.\overline{BW'} = c.\overline{CW'} = abc.\sqrt{\frac{\Sigma a^2 - 4\sqrt{3}.S}{\Sigma\,(b^2-c^2)^2}},$$

$$a.\overline{AW''} = b.\overline{BW''} = c.\overline{CW''} = abc.\sqrt{\frac{\Sigma a^2 + 4\sqrt{3}.S}{\Sigma\,(b^2-c^2)^2}},$$

W' fiind interior, iar W'' exterior cercului circumscris.

ANDREI DOBRESCU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL „GAZETA MATEMATICĂ"

Problemele dela proba scrisă din ziua de 10 Mai 1945

(Timpul acordat: 3 ore pentru fiecare materie)

CLASA IV-a

Algebra. Doi prieteni, Petre şi Ion pornesc să facă distanţa dintre două localităţi A şi B împreună. Cum n'au decât o bicicletă, Petre porneşte pe bicicletă, iar Ion pe jos, cu învoiala ca, undeva pe drum, Petre să-i lase bicicleta la marginea drumului, pornind mai departe pe jos, iar Ion să-şi continue de aci drumul pe bicicletă.

Ei au socotit distanţa dintre A şi B de 60 km şi au făcut socoteala să lase astfel bicicleta, încât, dacă Petre merge pe jos cu viteza de 3 km. pe oră şi pe bicicletă cu viteza de 10 km. pe oră, iar Ion, pe jos cu viteza de 4 km. pe oră, iar pe bicicletă cu 9 km. pe oră, să ajungă în acelaşi timp în B.

Din cauză că distanţa dintre A şi B nu eră cea evaluată de ei, Ion soseşte cu 45 minute mai târziu decât Petre.

La ce distanţă se învoiseră să lase bicicleta şi cu cât s'au înşelat asupra distanţei dintre A şi B ?

Geometria în spaţiu. Se dă cubul ABCDEFGH de latură *a*. Prin centrul O al cubului, se duce un plan perpendicular pe diagonala AG, care taie feţele cubului după o secţiune S.

1. Să se demonstreze că secțiunea S este un exagon regulat.

2. Să se calculeze, în funcție de latura a a cubului, suprafața totală și volumul piramidei ce are ca bază secțiunea hexagonală S și ca vârf colțul A al cubului dat.

CLASA V-a

Aritmetica rațională. 1°. Să se arate că expresiunea

$$E = n^2 (n + 1)^2 (2n^2 + 2n - 1)$$

este divizibilă prin 12, oricare ar fi n întreg.

2°. Să se afle numerele A și B, știind că produsul dintre comultiplele maxim (c. m. m. c. m) și codivizorul maxim (c. m. m. d. c) este 453.600 și că $\frac{A}{B} = 1{,}26$; apoi să se verifice.

3°. Trei mobile M_1, M_2, M_3, se mișcă dute-vino pe dreapta $AB = 2l$, pornind deodată din punctul A cu viteze respectiv de 3, 5 și 7. Știind că spațiul parcurs este produsul dintre viteză și timp, se cere:

a) Când toate cele 3 mobile se află în punctul C, mijlocul distanței AB și la ce intervale de timp se repetă coincidența.

b) Care este distanța parcursă de fiecare mobil, până când toate mobilele se întâlnesc în punctul C, pentru a 34-a oară.

c) Să se arate că nu pot să sosească toate mobilele în punctul C, mișcându-se în același sens.

4°. Să se extragă rădăcina de ordinul patru a numărului 1945, cu aproximație de 0,0001.

Algebra. Se dă ecuația:

$$x^2 + px + q = 0.$$

1. Să se găsească relația între p și q astfel ca:

$$x_1^4 + x_2^4 = 17$$

unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației date.

2. Să se determine valoarea lui p pentru $q = 2$ și în acest caz să se rezolve ecuația dată.

CLASA VI-a

Aritmetica rațională. 1. Să se arate că expresiunea

$$E = n (n + 1) (6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

este divizibilă prin 30, oricare ar fi n întreg pozitiv.

2. Să se demonstreze că suma indicatorilor tuturor divizorilor unui număr este egală cu numărul dat.

3. Să se arate că expresiunea

$$E = 1947^{30} + 2 \times 1946^{30} - 1945^{30} + 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times 60$$

se divide cu 62.

Geometrie. I. Se circumscrie triunghiului echilateral ABC, de latură a, un triunghiu dreptunghic A'B'C' ($\sphericalangle BA'C = 90^0$), care are $\sphericalangle BC'A = 30^0$. Insemnând cu S o suprafaţă, să se determine unghiul $A'BC = x$, astfel încât ariile:

$$S_{B'CA} \; ; \; S_{A'BAC} \; ; \; S_{C'AB}$$

să fie în progresie aritmetică.

Să se verifice pe cale geometrică rezultatul aflat.

II. Să se arate cum se poate rezelva ecuaţia

$$\sin (x+2a) = \sin (x+2b) + \sin (x+2c)$$

aducând-o la o formă căreia să i se poată aplica logaritmii.

Aplicaţie numerică:

$$a = 39^0\ 42'14'' \; ; \; b = 20^0\ 15'\ 16'' \; ; \; c = 8^0\ 14'\ 20''.$$

(Ambele chestiuni obligatoriu).

Geometria în spaţiu. I. Se dă o dreaptă D şi un punct A exterior ei. Să se afle locul geometric al dreptelor care trec prin punctul A şi care au drept cea mai mică distanţă faţă de dreapta D, o valoare dată d.

II. Se dă un trunchiu de piramidă de înălţime h, cu bazele B şi b paralele.

Feţele laterale ale trunchiului de piramidă, prelungite, se taie într'un punct V.

Să se demonstreze formula trunchiului de piramidă, prin exprimarea diferenţei între volumul piramidelor ce au ca vârf pe V şi ca baze pe B şi b.

(Ambele chestiuni obligatoriu).

(Va urma).

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timişoara. Anul XXV. Nr. 2. Aprilie 1945. V. ALACI: Ecuaţii algebrice cu rădăcini trigonometrice date. E. VIŞA: O demonstraţie intuitivă a teoremei lui THALES. Note matematice. Chestiuni de examen. Bibliografie. Probleme rezolvate şi propuse.

I. V. MĂTIEŞ. Contribuţii la rezolvarea congruenţelor de gradul n şi ordinul p. (Extras din *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XXIV).

I. V. MĂTIEŞ. Cuburi isofinale. (Extras din *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XXIV).

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 334. Vol. L, pag. 288. Se cer date asupra lui ISOPESCUL D. ISOPESCUL DUMITRU ARCADIE era Român bucovinean, dintr'o familie care a dat mulţi cărturari şi profesori. Născut la 26 August 1844, el a terminat studiile ştiinţifice la Viena în 1872 şi a fost numit profesor la gimnaziul (liceul) din Suceava. Acolo, în anuarul pe anul 1872—73, a publicat *Das Theorem der Fourier'schen Reihen.* Pe vremea aceea anuarele („programele") gimnaziilor din Germania şi Austria publicau câte o lucrare ştiinţifică a unui profesor în fiecare an. In acest fel, prima lucrare ştiinţifică tipărită a lui K. WEIERSTRASS a apărut în anuarul gimnaziului la care el era profesor. ISOPESCUL a mai publicat, în 1899, o traducere românească a Aritmeticei lui F. MOCNIK.

P. S.

DIVERSE

a) **Redacţionale**

Ulterior redactării problemei 5865, publicată la pag. 294 din acest volum, s'au mai primit soluţii bune dela D-nii: I. A. BARBU, M. D. COTARIU şi GR. A. GHEORGHE.

b) **Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"**

GEORGE BAŞTURESCU. Cifrele arabe. Bucureşti. Institutul de arte grafice Carol Göbl. 1901.

GIOVANNI FRATTINI. La nozione d'indice e l'analisi indeterminata dei polinomi interi. Roma 1908.

G. PEANO. Revue de mathématiques Vol. VIII. Nr. 3. Turin. 1903.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1656. *Să se construiască trei cercuri aşa ca polarele a două puncte date în raport cu fiecare din aceste cercuri să coincidă. Ce se întâmplă atunci cu polarele unui punct oarecare din plan?*

C. C. TEODORESCU.

Soluţie şi generalizare trimisă la 29 Ianuarie 1912 de D-l DAN BARBILIAN, pe când era elev în clasa a VI-a a Liceului Lazăr din Bucureşti.

Fie A şi B punctele date, C_i centrele cercurilor căutate (C_i) de raze R_i. Polara lui A faţă de (C_i) e perpendiculară pe AC_i. Cum polarele lui A faţă de cercurile (C_i) trebue să coincidă, rezultă că A şi C_i sunt colineare. De asemeni B şi C_i sunt colineare. Deci centrele cercurilor (C_i) se află pe dreapta determinată de AB. Fie A' intersecţia polarei lui A cu dreapta AB, şi B' intersecţia polarei lui B cu AB. Din însăşi definiţia polarei, avem:

$$C_iA \cdot C_iA' = R_i^2 = C_iB \cdot C_iB'$$

$$\frac{C_iA}{C_iB} = \frac{C_iB'}{C_iA'} = \frac{C_iA - C_iB'}{C_iB - C_iA'} = \frac{B'A}{A'B}$$

A, B, A', B' sunt aceleaşi pentru toate cercurile căutate, conform enunţului. Dar ştim că pe dreapta AB există *un singur* punct care o împarte în un raport dat. Ca atare, relaţiile precedente nu pot fi verificate decât în două cazuri:

1°. Sau centrele C_i coincid.

2°. Sau, dacă centrele C_i nu coincid, raportul din urmă este nedeterminat, adică A' coincide cu B, iar B' coincide cu A.

In cazul întâiu, relaţia $C_iA \cdot C_iA' = R_i^2$ arată că şi razele R_i coincid, adică cercurile se reduc la unul singur, ceea ce e banal şi nu corespunde ploblemei.

Dacă însă A coincide cu B', iar B coincide cu A', se deduce

$$C_iA \cdot C_iB = R_i^2$$

adică punctele în care (C_i) taie dreapta AB sunt conjugate armonic cu A şi cu B. Atunci cercurile (C_i) *fac parte din fascicolul de cercuri care admite ca puncte limită* (puncte ale lui PONCELET), *tocmai punctele date* A *şi* B.

E evident că era suficient să se ceară în enunţ numai *două* cercuri, pentru a ajunge la acelaşi răspuns: că se găsesc o infinitate de cercuri, făcând parte din fascicolul având pe A şi B ca puncte ale lui PONCELET.

Cercurile (C) făcând parte dintr'un fascicol, polarele oricărui punct din planul lor faţă de ele sunt concurente. (Vezi, de ex. *F. G. M. Exercices de Géométrie théor.* 1270).

Problema se pune în mod analog pentru spaţiu. Sferele astfel ca planele polare a două puncte date faţă de ele să coincidă, fac parte dintr'un fascicol de sfere, admiţând punctele date ca puncte limită.

Generalizare. Să se afle cercurile (C_i) astfel ca polarele în raport cu ele a două puncte date P şi Q să fie concurente. Ce se întâmplă în acest caz cu polarele unui punct oarecare din plan?

Fie P' punctul de concurenţă al polarelor lui P faţă de (C_i) şi Q' punctul de concurenţă al polarelor lui Q. Dacă M_i e intersecţia lui PC_i cu polara corespunzătoare, iar N_i e intersecţia lui QC_i cu polara lui Q faţă de (C_i), avem:

$$C_iP \cdot C_iM_i = R_i^2 = C_iQ \cdot C_iN_i.$$

Aceasta arată că (C_i) e ortogonal cercurilor (M) şi (N) descrise respectiv pe PP' şi QQ' ca diametri $\left(\text{căci } \sphericalangle PM_iP' = \sphericalangle QN_iQ' = \frac{\pi}{2}\right)$. Dar atunci, în baza unei proprietăţi cunoscute a cercurilor ortogonale, locul centrelor C_i ale cercurilor căutate (C_i) *este tocmai axa radicală a cercurilor* (M) *şi* (N), iar cercurile (C_i) formează un fascicol de cercuri, ortogonale la cele două cercuri (M) şi (N).

Cercurile (C_i) formând un fascicol, polarele unui punct oarecare E din plan faţă de toate aceste cercuri sunt concurente într'un punct E'.

Se poate preciza poziţia lui E'. Avem două cazuri, după cum cercurile (M) şi (N) sunt secante sau nu.

Dacă cercurile (M) şi (N) sunt secante, fie K şi L punctele lor de intersecţie. Insemnând cu F_i intersecţia polarei lui E faţă de (C_i) cu dreapta EC_i, avem:

$$C_iF_i \cdot C_iE = R_i^2 = C_iK \cdot C_iL.$$

Rezultă că E, F_i, K, L sunt pe acelaşi cerc, care este cercul circumscris triunghiului EKL. Polara lui E fiind perpendiculară în F_i pe EF_iC_i, ea trece prin punctul E' diametral opus lui E în cercul (EKL).

Dăcă cercurile (M) şi (N) nu sunt secante, cercurile (C_i) trec prin punctele limită, ale lui PONCELET, I şi J ale fasciculului determinat de cercurile (M) şi (N). In acest caz

$$C_iF_i \cdot E = R_i^2 = \overline{C_iI}^2 = \overline{C_iJ}^2.$$

De aci:

$$\frac{C_iF_i}{C_iI} = \frac{C_iI}{C_iE}, \quad \frac{C_iF_i}{C_iJ} = \frac{C_iJ}{C_iE}.$$

Prima din aceste două din urmă relații arată că triunghiurile C_iF_iI și C_iEI sunt asemenea și, prin urmare, avem și:

$$\frac{C_iF_i}{C_iI} = \frac{F_iI}{EI}.$$

In mod analog, a doua relație ne dă

$$\frac{C_iF_i}{C_iJ} = \frac{F_iJ}{EJ}.$$

Cum $C_iI = C_iJ$ (ca raze în cercul (C_i)), urmează:

$$\frac{F_iI}{F_iJ} = \frac{EI}{EJ}.$$

Punctele E, I, J sunt fixe; deci, raportul $\frac{F_iI}{F_iJ}$ fiind constant, locul lui F_i e un cerc. Este cercul care taie dreapta IJ în picioarele bisectoarelor interioară și exterioară a unghiului din E în triunghiul EIJ și care trece prin E. Polarele lui E, față de (C_i) fiind perpendiculare în F_i pe EF_iC_i, trec prin punctul E' diametral opus lui E în acest cerc.

Toate soluțiile primite la această problemă sunt dinaintea primului război mondial, adică sunt mai vechi de 30 ani. D-l D. BARBILIAN a dat și o soluție analitică. O foarte bună soluție geometrică, fără generalizarea precedentă, a trimis mult regretatul Slt. I. S. TEODORESCU. La 30 Aprilie 1912 D-l C. AVRAMESCU arată că problema reprezintă un caz particular din articolul *„Câteva aplicațiuni ale fascicolelor și rețelelor punctuale de conice"* publicat de locotenentul (azi general) G. I. POPESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. XVI, pag, 325. Altă soluție dela D-l A. I. BARBAIANI.

Notă. Colegul P. SERGESCU a binevoit să-mi supună, înainte de publicarea lor în *Gazetă*, aceste rânduri vechi, pentru eventuale adnotări.

Nu am nimic de modificat la soluția de mai sus. De altfel, după atâția ani, nici nu-mi mai aparține. Ea e în întregime proprietatea elevului neuitatului ION BANCIU, profesorul de matematice al seriei 1911—14 dela liceul Lazăr.

Tot ce e pozitiv în soluția publicată, se datorește învățământului acestui mare dascăl. In special acea proverbială „rigoare a lui BANCIU", pe care căuta s'o treacă elevilor săi.

O singură observație, de natură matematică. Problema e artificială și nu merita sforțarea suplimentară a unei generalizări și unei soluții analitice. Totuși, la sfârșitul generalizării, iese în relief un rezultat care merită să fie reținut. Anume:

Dacă prin I, J *trece un cerc care admite perechia* E, F *ca puncte simetrice, reciproc: prin* E, F *trece un al doilea cerc față de care* I, J *sunt simetrice.*

Nu ştiu dacă există o demonstraţie elementară mai simplă decât cea din text. Dar argumentul cel mai apropiat, deşi de natură neelementară, e următorul:

Cercul dat în enunţ e un cerc al lui APOLLONIUS relativ la perechia E, F. Aşa dar raportul anarmonic complex din planul lui GAUSS

$$(I\,J\,E\,F)$$

e unimodular. Avem însă

$$(I\,J\,E\,F) = (E\,F\,I\,J)$$

deci ultimul raport anarmonic e încă unimodular. Prin urmare există un cerc al lui APOLLONIUS relativ la perechia I, J care trece prin E, F.

D. B.

PROBLEMA 2381. *Să se găsească numerele mai mici ca un milion, care ridicate la orice putere se termină prin ele însuşi.*

G. OLTEANU.

Fie N un număr de n cifre în condiţiile problemei, deci

$$N^i - N = 10^n \mathcal{M}. \qquad (1)$$

unde M este un număr întreg. Din (1) se scoate:

$$N\,(N-1)\,(N^{i-1} + N^{i-2} + \ldots + N + 1) = 10^n \mathcal{M}. \qquad (2)$$

Dacă (1) şi deci (2) are loc pentru orice valoare a lui i înseamnă că vom avea *neapărat şi:*

$$N^2 - N = N\,(N-1) = 10^n \mathcal{M}. \qquad (3)$$

Cum N şi N — 1 sunt primi între ei, (3) va avea loc numai dacă

$$N = 2^n p \quad \text{şi} \quad N - 1 = 5^n q \quad \text{sau} \quad N = 5^n p\,, \quad N - 1 = 2^n q. \qquad (4)$$

Relaţiile (3) şi (1) trebuind să aibă loc *simultan* oricare ar fi i rezultă că *dacă* N^2 *se termină cu* N *atunci toate puterile lui* N *se bucură de această proprietate.*

Problema revine deci la *a căuta patratele care se termină cu rădăcina lor* şi fiindcă enunţul este limitativ urmează că trebue să rezolvăm ecuaţiile (4) în numere întregi pentru

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ şi } 6.$$

Să căutăm soluţiile pentru $n = 3$ de exemplu. Pentru această valoare, primele două egalităţi (4) dau

$$2^3 p = 5^3 q + 1 \quad \therefore \quad 8p = 125q + 1$$

de unde se deduce, din aproape în aproape

$$p = 125t + 47 \quad \text{şi} \quad q = 8t + 3 \quad \therefore \quad N = 1000t + 376$$

Cum N este de 3 cifre nu se poate lua decât $t = 1$ şi dacă soluţia

$$376^2 = 141376 \quad \therefore \quad 376^t = 1000\mathcal{M} + 376.$$

Al doilea şir de egalităţi din (4) dau soluţia

$$625^2 = 390625 \quad \therefore \quad 625^t = 1000\mathcal{M} + 625.$$

Urmând aceeaşi cale pentru celelalte valori ale lui n găsim următoarele rezultate

$n=1$, N=1,5 şi 6 ; $n=2$, N=25 şi 76 ; $n=4$, N=0625 şi 9376; $n=5$, N=09376 şi 90625 ; N=6, N=109376 şi 890625.

Notă. 1°. Problema a fost propusă la 15 Aprilie 1916 la pag. 278, Vol. XXI. Sunt anunţaţi ca rezolvitori ai ei: In anul 1915—16, Vol. XXI, d-nii E. BIERNASCHI, A. BRENER, M. GHERMĂNESCU, C. NICOLAU, V. PINTILESCU, N. POP, C. ŞTEFĂNESCU, E. STIHI, L. TEODORIU. In anul 1916—17, Vol. XXII. D-l. O. ORĂNESCU. In anul 1920—21, Vol. XXVI D-l. N. CIORĂNESCU. In anul 1923—24 regretatul N. BOTEA şi în anul 1928—29, Vol. XXXIV D-nii CR. I. RĂMNICEANU şi I. C. SAVIN.

2°. Problema aceasta se încadrează în cazul general tratat de regretatul profesor GEORGE ŢIŢEICA pe o cale magistrală în *Gazeta Matematică* Vol. IX, pag. 76 în articolul *O chestiune de teoria numerelor.* Pentrucă corespondenţii actuali nu au, în general, la dispoziţie acel volum, rezum după cum urmează rezultatele foarte interesante la care a ajuns G. ŢIŢEICA.

a) *Orice descompunere a unei baze de numeraţie* B *într'un produs de doi factori primi între ei ne dau două soluţii diferite* N_1, N_2 *a ecuaţiei* (2) *deci numărul soluţiilor este egal cu dublul numărului acestor descompuneri*

b) *Intre soluţiile* N_1, N_2 *şi baza* B *există relaţia*

$$N_1 + N_2 = B^n + 1$$

n *fiind numărul cifrelor numerelor* N_1 *şi* N_2, *dintre care unul poate fi formal de* n *cifre,*

3°. Cazul $n = 3$, pe care l-am tratat aici la soluţia problemei 2381, formează obiectul problemei 799, rezolvată pe alte căi în *Gazeta Matematică* Vol. IX, pag. 48.

4°. In legătură cu probleme pe asemenea natură, a se vedea problema 6074 pe care am propus-o la pag. 270 din acest volum,

G-L GH. B.

PROBLEMA 3360. *Să se calculeze expresiunile:*

$$E_p = (x\,E_{p-1})' \quad , \quad F_p = (x\,F_{p-1})'$$

ştiind că accentul e simbolul derivării şi că

$E_0 = \sin x$, $E_1 = (x \sin x)' \ldots$, iar $F_0 = \cos x$, $F_1 = (x \cos x)', \ldots$

B. IG. BAIDAFF.

Avem

$$E_1 = \left(\frac{x^2}{1!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \ldots\right)' = 2\frac{x}{1!} - 4\frac{x^3}{3!} + 6\frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$E_2 = \left(2\frac{x^2}{1!} - 4\frac{x^4}{3!} + 6\frac{x^6}{5!} - \ldots\right)' = 2^2\frac{x}{1!} - 4^2\frac{x^3}{3!} + 6^2\frac{x^5}{5!} - \ldots$$

. . . . . .

$$E_p = 2^p\frac{x}{1!} - 4^p\frac{x^3}{3!} + 6^p\frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Analog,

$$F_1 = \left(\frac{x}{0!} - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \ldots\right)' = \left(1 \cdot \frac{1}{0!} - 3\frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$$

. . . . . .

$$F_p = 1^p\frac{1}{0!} - 3^p\frac{x^2}{2!} + 5^p\frac{x^4}{4!} - \ldots$$

în care $0! = 1$.

Generalizare. Dacă

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

$$E_0 = f(x) \quad , \quad E_1 = (x f(x))', \ldots$$

atunci

$$E_p = 1^p A_1 x + 2^p A_2 x^2 + 3^p A_3 x^3 + \ldots$$

B. IG. BAIDAFF

Buenos Aires, 7 Oct. 1939.

Notă. Problema a fost rezolvată de regretatul N. BOTEA, când era student în anul I al al facultăţii din Bucureşti.

Colegul de societate de peste oceanul atlantic, a trimis soluţia şi generalizarea precedentă însoţită de o scrisoare datată Buenos Aires 7.10.1939, scrisoare pe care o termină cu cuvintele profetice:

« De aici dela distanță privim cu neliniște la marea furtună care « se apropie de iubita Românie, dar în același timp cu multă încredere în « viitorul nostru ».

In Octombrie 1939, războiul contra Poloniei era în a treia lună iar România era neutră. Colegul de peste ocean întrevedea furtuna uriașă care a răscolit omenirea.

Este cazul să menționăm cu acest prilej că D-l B. IG. BAIDAFF, Doctor în matematici, este membru la societatea *« Gazeta Matematică »* dela 24 August 1924. D-sa a părăsit de mult România, luând cu dânsul entuziasmul și dragostea de *Gazeta Matematică* și de matematici pe care le căpătase în România încă din anul 1904, când ca elev al Liceului Național din Iași a început să colaboreze la *Gazeta Matematică*, ca rezolvitor al problemei 929.

In 1919 a scos la Buenos Aires revista *Revista de matematicos y fisica elementales*, alcătuită după aceleași norme ca *Gazeta Matematică*. Despre acea revistă a scris D-l I. IONESCU o recensie în *Gazeta Matematică*, Vol. XXVI, pag. 67.

Ulterior în 1928 a fondat revista *Boletîn Matematico* la care au lucrat mulți din corespondenții noștri și au colaborat parte din membrii societății *« Gazeta Matemaiică »*. Războiul întrerupând comunicațiile, de câțiva ani nu mai știm nimic despre revistele, copii spirituali ai *Gazetei Matematice*. Este probabil că foarte curând le vom revedea.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5815. *Să se studieze natura seriei*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} + n^{\alpha-1} + \ldots + 1}{n^{\alpha'} + n^{\alpha'-1} + \ldots + 1}.$$

Caz particular: $\alpha = 6$, $\alpha' = 3$.

C. C. ILIESCU.

Această problemă este un caz particular al problemei analoage în care termenul general este câtul a două polinoame în n deci, dacă $\alpha' - \alpha > 1$, seria este convergentă, iar dacă $\alpha' - \alpha \leqslant 1$ seria este divergentă.

Notă. Au trimis soluții bune, la această problemă, D-nii: V. JURIST, L. MUNTEANU, V. PĂLĂCEANU, M. PĂTRĂȘCIOIU și E. WEGNER.

M. G.

PROBLEMA 5827. *Să se găsească numerele al căror indicator este o putere a lui 10.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA BÂRZESCU și D. D. NACHE (liceul militar, Iași).

Fie

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots l^{\lambda}$$

unul din numerele căutate, unde $a, b, c, \dots l$ sunt divizorii săi primi; avem

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \dots l^{\lambda-1} (a-1)(b-1)(c-1) \dots$$
$$\dots (l-1) = 2^m \cdot 5^m .$$

O primă condiție este ca numerele $a-1$, $b-1$, etc. să nu conțină ca factori decât pe 2 și 5, adică

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1} + 1 \quad , \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2} + 1, \text{ etc.}$$

Aceeași condiție trebue să o îndeplinească și produsul $a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \dots l^{\lambda-1}$; rezultă că unul din numerele $a, b, c, \dots l$ poate fi egal cu 2, altul cu 5, $a = 2$, $b = 5$, iar ceilalți trebue să dispară; deci $\gamma = \delta = \dots = \lambda = 1$. Numerele căutate vor fi astfel de forma

$$N = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1} + 1)(2^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2} + 1) \dots (2^{\alpha_n} \cdot 5^{\beta_n} + 1)$$

Notă. S'au mai primit câteva soluții insuficiente.

M. G.

PROBLEMA 5898. *Fie* D *piciorul bisectoarei interioare a unghiului* C *din unghiul* ABC. *Să se demonstreze, că, dacă avem una din relațiile:*

$$a) \quad \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2} + 2 \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - 1 = 0 \qquad b) \quad \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = 2 \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

triunghiul ABC *este dreptunghic.*

GH. D. SIMIONESCU.

Teorema bisectoarei unui unghiu al unui triunghiu, aplicată unghiului C, ne permite să calculăm segmentele $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \quad ; \quad \overline{AD} + \overline{BD} = c$$

$$\therefore \quad \overline{AD} = \frac{bc}{a+b} \quad ; \quad \overline{BD} = \frac{ac}{a+b} .$$

Relaţia (a) devine:

$$\frac{\frac{b^2 c^2}{(a+b)^2}}{b^2} + 2 \cdot \frac{\frac{bc}{a+b}}{c} = 1 \qquad c^2 + 2b(a+b) = (a+b)^2$$

$$\therefore \qquad b^2 + c^2 = a^2.$$

După teorema lui PITAGORA *triunghiul* ABC *este dreptunghic în* A.

In relaţia (b), avem: $\overline{CD}^2 = \frac{4p\,(p-c)\,ab}{(a+b)^2}$:

$$\frac{4p\,(p-c)\,ab}{(a+b)^2 \cdot ab} = 2 \cdot \frac{bc}{c\,(a+b)} \qquad \therefore \quad 2p\,(p-c) = b\,(a+b)$$

$$(a+b+c)\,(a+b-c) = 2b\,(a+b) \;\therefore\; (a+b)^2 - c^2 = 2b\,(a+b)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

In baza aceleiaşi teoreme *triunghiul* ABC *este dreptunghic în* A.

MIHAI-DUMITRU R. CONSTANTINESCU
Clasa VI-a A. Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploieşti.

Soluţii asemănătoare au dat D-nii: CRISTU CANTUNIAR (clasa a VII-a liceul „T. Maiorescu", Bucureşti), P. P. DRĂGHICESCU (student inginer), MARIN F. VĂDUVA (student-inginer), EUGEN WEGENER (Bucureşti), CONST. C. ILIESCU (clasa a VIII-a Colegiul „N. Filipescu", Predeal), MARINEL MARINESCU (Colegiul „N. Filipescu", clasa a VII-a), MARCEL D. COTARIU (Brăila), ILIE N. CONSTANTINESCU (clasa a VIII-a liceul „N. Bălcescu", Brăila), CONST. C. TINCU (liceul „C. Diaconovici-Loga", Timişoara), MIHAI SP. MANOLIU (liceul „Codreanu", Bârlad), GEORGE M. NICOLAE (Colegiul „Carol I", Craiova), MIRCEA I. PĂTRĂŞCIOIU (clasa a VIII-a liceul „Haşdeu". Buzău), VASILE D. PĂLĂCEANU (liceul militar, Timişoara), CONST. STAICU (clasa VIII-a), STELIAN C. MARINESCU (clasa a VI-a), MIRCEA PRISICEANU (clasa a VII-a), CONST. GUŢU (elevi liceul Militar „Ştefan Cel Mare"), GH. A. GRIGORE (elev particular clasa VII-a), MIRCEA IGNAT (liceul militar Iaşi), AL. AL. TIMOTIN (Student Politehnica Bucureşti), C. C. DIACONU (Liceul „A. Vlaicu", Bucureşti) şi M. D. PETCULESCU (Student-inginer, Bucureşti).

D-l EMIL MARINESCU (liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti) a dat o soluţie trigonometrică prea lungă pentru simplitatea problemei.

Notă. Problema a avut în adevăr la bază o idee trigonometrică, pe care o dau pentru a arăta de unde vin relaţiile. Avem:

$$\operatorname{tg} C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},$$

deci exprimând pe tgC în funcţie de $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2\,\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}}{1-\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2}} \quad \therefore \quad 1-\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AC}^2} = 2\,\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \qquad \text{(prima relaţie).}$$

Apoi relaţia $\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{C}{2}$ devine:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 2\,\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \quad \therefore \quad \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}} = 2\,\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \qquad \text{(a doua relaţie).}$$

PROBLEMA 6002. *Să se rezolve ecuaţia trigonometrică*

$$\sin x + \sec x = \cos x + \operatorname{cosec} x$$

I. IONESCU.

Soluţie, dată de D-nii: AUREL G. COJANU, MARCEL D. COTARIU (studenţi-ingineri, Politehnica Bucureşti); TR. G. DUMITRESCU (student, chimia industrială); I. BARBU (Liceul Caracal); E. N. WEGENER (Bucureşti); ILIE N. CONSTANTINESCU (Liceul Brăila); BARBU I. POPESCU (Liceul militar, Timişoara).

Din ecuaţia dată scoatem succesiv:

$$\frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1}{\sin x} - \sin x \quad ; \quad \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$

$$\sin^3 x = \cos^3 x \quad ; \quad \operatorname{tg}^3 x = 1$$

$$\therefore \qquad \operatorname{tg} x = 1 \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Prima ecuaţie are rădăcinile reale

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

iar a doua are rădăcinile imaginare

$$\operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Soluţie, dată de D-nii: M. R. CONSTANTINESCU (Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti); AL. A. TIMOTIN (Student, Politehnica Bucureşti); S-LT. C. PANTELIMON (Ploeşti): GH. D. BRAŞOVEANU, GEORGE M. NICOLAE (Colegiul Naţional „Carol I", Craiova); P. D. COLUMBEANU (Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal); C. C. DIACONU, E. E. MARINESCU, M. AL. LEON (Liceul „A. Vlaicu", Bucureşti); I. FILIMON (Liceul militar, Timişoara); M. I. PĂTRĂŞCIOIU (Buzău); GH. A. GRIGORE (elev particular); M. V. SOARE (Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti), C. C. TINCU (Timişoara).

Din ecuaţia dată se scoate

$$\sin x - \cos x + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 0;\ (\sin x - \cos x)\left(1 - \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 0$$

$$\therefore\ (\sin x - \cos x)\frac{\sin 2x - 2}{\sin x \cos x} = 0\ \therefore\ \sin x = \cos x \text{ şi } \sin 2x = 2.$$

Prima ecuaţie dă aceleaşi soluţii ca la soluţia întâi, iar ecuaţia a doua este imposibilă căci $\sin 2x \leqslant 1$.

EXERCIŢII

28. *Un triunghiu* MDN *isoscel în* D *variază în plan în condiţiile următoare:* 1) *rămâne asemenea lui însuşi*, 2) *vârful* D *variază pe o dreaptă fixă* OY *şi* 3) *laturile* MN *şi* MD *trec respectiv prin punctele fixe* P *şi* Q. *Să se arate, că locul lui* N *este o cisoidă generală**).

D. B.

R. E clar, că locul lui M este un cerc Γ care trece prin P şi Q.

Să ducem prin Q paralela la MN care taie pe DN în R şi prin R paralela la PQ care taie pe MN în S. Trecerea dela D, la S prin intermediul ui R e dată de o asemănare directă compusă cu o translaţie, amândouă bine determinate. Deci fiindcă D variază pe o dreaptă, omologul său S variază pe o altă dreaptă fixă Δ.

Pe de altă parte, din triunghiuri egale uşor de recunoscut urmează $\overline{SN} = \overline{MP}$. Conchidem, că locul lui N este cisoida relativă la polul P, cercul Γ şi dreapta Δ.

---

*) Vezi nota 20 dela pag. 253 şi soluţia problemei 1591 dela pag. 188 din acest volum.

29. *Să se verifice identitatea:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & (b-a)^3 (1+c)^3 & (b-a)(1+c) \\ 1 & (a-c)^3 (1+b)^3 & (a-c)(1+b) \\ 1 & (c-b)^3 (1+a)^3 & (c-b)(1+a) \end{vmatrix} = 0.$$

MIHAI R. CONSTANTINESCU.

R. Avem succesiv:

$$\Delta \equiv \sum (a-c)^3 (1+b)^3 [(c-b)(1+a) - (b-a)(1+c)] = 0$$

$$\Delta \equiv \sum (a-c)^3 (1+b)^3 [c+a+2ac-2b-ab-bc] = 0$$

$$\Delta \equiv \sum (-2a^4 b^3 + 2b^3 c^4 - 2a^3 b^4 + 2b^4 c^3 - a^4 b^4 + b^4 c^4 - 6a^3 b^3$$
$$+ 6b^3 c^3 + 2a^4 b + 2a^4 c - 2bc^4 - 2ac^4 - 6a^3 b^2 + 6b^2 c^3 + 6a^2 c^3$$
$$- 6a^3 c^2 - 4ab^3 c^3 + 4a^3 b^3 c + 2a^4 b^3 c - 2ab^3 c^4 - 2ab^4 c^3 + 2a^3 b^4 c$$
$$+ 6a^2 b^4 c - 6ab^4 c^2 + 6a^4 b^2 c - 6ab^2 c^4 + 6a^2 b^3 c^3 - 6a^3 b^3 c^2$$
$$+ 18a^2 b^3 c - 18ab^3 c^2 + 18a^2 b^2 c^3 - 18a^3 b^2 c^2 + 6abc^3 - 6a^3 bc$$
$$+ 6a^4 bc - 6abc^4 - 18ab^2 c^2 + 18a^3 b^2 c + 18a^2 bc^3 - 18a^3 bc^2$$
$$+ a^4 - c^4 + 2bc^3 - 2a^3 c + 2c^3 a - 2a^3 b - 2abc^3 + 2a^3 bc - 6abc^2 + 6a^2 bc) = 0.$$

Ţinând seamă că

$$\sum a^4 b^3 = \sum b^4 c^3, \ \sum a^4 b^4 = \sum b^4 c^4, \ldots, \ \sum a^2 b^3 c^3 = \sum a^3 b^2 c^2 \ldots,$$

toţi termenii membrului întâi se reduc uşor, determinantul devenind nul, adică tocmai ce cerea identitatea enunţului.

PROBLEME PROPUSE

6101. In indicatoarele de mers al trenurilor se notează de obicei cu H^{ab}, ora H şi minutele *ab* la care pleacă sau soseşte un tren în gară. Cineva citeşte pe H^{ab} ca pe un număr zecimal şi ajunge la gară cu 20 minute înaintea trenului.

Se întreabă:

1°. Care este numărul de minute *ab*.

2°. Dacă ar continua să facă această confuzie de citire, care este maximum de minute în care ar aştepta în gară sosirea unui tren.

G-L GH. BUICLIU.

6102. Un cub perfect împărţit prin 234 ± 109 dă ca rest rădăcina sa cubică, mărită respectiv cu 108 ± 82. Care sunt cuburile care se bucură de această proprietate?

I. V. MĂTIEŞ.

6103. Raportul a două numere naturale a, b este de forma,

$$\frac{a}{b} = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{p_i - 1}{p_i}\right)^{\alpha_i},$$

unde p_i sunt numere prime diferite şi α_i numere întregi pozitive. Să se demonstreze că avem

$$\varphi_m(a) \leqq \varphi_m(b),$$

oricare ar fi m, $\varphi_m(n)$ fiind indicatorul iterat de ordinul m al lui n.

TIBERIU POPOVICIU.

6104. Fie W un centru izogon al triunghiului ABC şi A_1, B_1, C_1 vârfurile triunghiurilor echilaterale BCA_1, CAB_1, BAC_1 corespunzătoare.

Purtăm pe cevienele lui W:

$$\overline{A_1A'} = \overline{AW} \quad , \quad \overline{B_1B'} = \overline{BW} \quad , \quad \overline{C_1C'} = \overline{CW}.$$

Să se arate că W este centrul de greutate al triunghiului A'B'C'.

N. N. MIHĂILEANU.

6105. Să se rezolve ecuaţia

$$\begin{vmatrix} a+\sin x & a & a & a & a & a \\ a & a+\cos x & a & a & a & a \\ a & a & a+\operatorname{tg} x & a & a & a \\ a & a & a & a+\operatorname{cot} x & a & a \\ a & a & a & a & a+\sec x & a \\ a & a & a & a & a & a+\operatorname{cosec} x \end{vmatrix} = 0.$$

Discuţie. Caz particular: $a = 1$.

E. WEGENER.

6106. Latura unui pentagon regulat înscris este comensurabilă cu latura decagonului regulat înscris sau cu a pentagonului regulat stelat?

I. IONESCU.

6107. Dacă patru coeficienţi consecutivi A, B, C, D ai unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi reali sunt astfel încât elementele duble ale involuţiei determinată de ecuaţiile

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0 \quad , \quad Bx^2 + 2Cx + D = 0$$

să fie reale, ecuaţia admite neapărat rădăcini imaginare.

B. BARBĂLAT.

6108. Pe tangenta în M la o curbă plană se ia în acelaşi sens un segment egal cu dublul razei de curbură a lui M, obţinându-se punctul C'.

1°. Să se afle curba loc a intersecţiei cercului osculator cu diametrul acestui cerc, care trece prin C'.

2°. Să se afle curba (M) pentru care locul dela 1° este o dreaptă.

MAIOR MIHAIL I. FOCŞENEANU.

6109. Un funcţionar merge la serviciu cu tramwaiul; coborînd la staţia A, trebue să mai meargă o bucată pe jos în acelaşi sens; coborînd la staţia B, trebue să meargă în sens opus.

La care staţie ar fi mai bine să coboare?

Discuţie.

COMANDOR I. LINTEŞ.

6110. Un punct material M alunecă fără frecare pe un plan, tangent unei sfere fixe, al cărui punct de contact descrie uniform un cerc mare fix al sferei.

Să se studieze mişcarea punctului M şi să se determine reacţiunea planului tangent, ştiind că asupra punctului M nu lucrează nicio forţă. Generalizare.

M. GHERMĂNESCU.

ERATĂ. La pag. 327 din numărul trecut, rândul 11 de jos se înlocueşte $N \geqslant 64$ prin $N \leqslant 64$.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Bârzescu C. Al. (6083, 86); *Bârzescu M.* (6039, 41, 43, 47, 50, 60); *Berdan C.* (2264, 769, 3405, 681, 99, 4647, 710, 849, 5943, 6007, 19, 24, 66, 70, 79, 89, 97, E, P); *Bodnărescu M. H.* (A); *Cantuniar I. Cr.* (6046); *Cârje I.* (6084); *Cârstea D. M.* (6086, 87); *Chiraleu S. I.* (5864, 6005, 15, 47, 89); *Chiricescu I. I.* 6087); *Cojanu E. A.* (6087); *Coman Al.* (6087); *Constantinescu E. E.* (6083, 84, 87); *Filip V. I.* (6083); *Gaiu N.* (E); *Harghel E. I.* (6015, 27, 39, 46, 67, 83, 86, 87, 88, 89, 94); *Huideş V. Al.* (6083); *Ieşan Al.* (6046); *Ignat M.* (6086, 87); *Leon A. M.* (6011, 88); *Mărăndici S. Al.* (6084); *Marinescu E. Em.* (5824, 900, 26, 28, 29, 72, 85, 86, 87, 6055, 80); *Minculescu Al.* (6084, 87); *Nache D. D.* (6029, 60); *Negulescu I.* (6083, 84, 87); *Pantelimon V. C.* (5960, 74, 6046, 47); *Petculescu M.* (5707, 6089); *Popescu I. B.* (5916, 42, 6086, 87); *Popescu A. Stelian* (6083, 84); *Popescu M. Stelian* (6083, 84, 87); *Rogoz V. I.* (6084); *Sileşteanu D. D.* (6083, 84); *Sintescu N. M.* (6084); *Soare V. M.* (P); *Telniceanu A.* (6083, 84, 87); *Teodorescu C. Const.* (6084, 87); *Timotin A. A.* (5914, 6043, 48, 89); *Tofan C. A.* (6083); *Vargă I. A.* (5942, 44, 45, 56, 6011, 26, 39, 41, 44, 46, 47, 49, 67, 83, 86, 87, 88, 89, 90, 96); *Vlăsia M. Gh.* (6084); *Vrânceanu G. G.* (6043, 66); *Wegener E.* (4484, 5234, 58, 396, 519, 602, 704, 887, 906, 6041, 62, 88).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XVI şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică 1895—1935**. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 400

XX. **I. I Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. I. Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. Ion Ionescu, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 600

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 31.711.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1945

SUMARUL

1. Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din 1945 . . . . . *Gh. D. Simionescu.*
2. Erorile de tipar în cărţile de matematică *Ion Ionescu.*
3. Raport asupra premiului „V. Cristescu". *Comisiunea pentru premii.*
4. **Note matematice:** 27—39.
5. Chestiuni de examen.
6. **Bibliografie.**
7. Cereri.
8. Diverse.
9. **Probleme rezolvate:** 2865, 5144, 5523, 5785, 5934.
10. **Exerciţii:** 30—33.
11. Probleme propuse: 6105, 6111 — 6119.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1945

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici, Directorul Statisticei Financiare; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944, sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: 6006, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 7100, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133.

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 400

GAZETA MATEMATICA

ANUL L, Nr. 10 *SUPLIMENT* IUNIE 1945

DAREA DE SEAMĂ

asupra mesei comune care a încheiat al 34-lea concurs al „Gazetei Matematice"

După o întrerupere de un an, concursul *Gazetei Matematice* pe anul 1945, şi al 34-lea dela începutul ei, s'a ţinut după toate datinele, în această săptămână luminată.

Concursul terminat la amiaza zilei de 12 Mai, un grup de membri ai *Gazetei* compus din: D-ra GABRIELA ŢIŢEICA şi D-nii: Ing. I. S. ANTONIU, Ing. AL. BUNESCU, Prof. D. BARBILIAN, Ing. D. V. CAMBUREANU, Ing. V. CAMBUREANU, Ing. I. CHIŢULESCU, Lt.-Colonel DRAGOMIRESCU-BUZNE, Prof. ŞERBAN GHEORGHIU, Căp. IONESCU-ŢIU, Prof. N. N. MIHĂILEANU, Prof. PETRE SERGESCU, Prof. G. D. SIMIONESCU, Prof. I. I. STAMATE, Ing. GH. STAMATESCU, Prof. I. D. STAN, Lt.-C-dor AURELIAN STAN, Ing. D. STOICA, Ing. AL. STOENESCU, Prof. C. C. TEODORESCU, Prof. RADU ŢIŢEICA, Prof. ŞERBAN ŢIŢEICA, precum şi din delegaţi ai elevilor concurenţi: SORIN DUMITRESCU, VALENTIN LEŢIA şi TRAIAN MUSTĂCESCU, s'au dus să prezinte omagiile *Gazetei* active de azi şi să ureze sănătate fondatorului şi stâlpului său: Profesorului Ing. ION IONESCU, ţintuit de mai mult timp pe patul suferinţei. Primirea caldă, în locuinţa sa modestă din Str. Răsuri, 25 şi însufleţita manifestaţie a membrilor şi concurenţilor au făcut să se depene firul amintirilor: Construcţia podului dela Cernavoda, întemeierea *Gazetei Matematice* acum 50 de ani, Construcţia Casei Gazetei, acum 10 ani, şi să se constate trăinicia şi paza cerească asupra lor, în mijlocul primejdiilor din ultimul timp.

S'au ciocnit tradiţionalele ouă roşii şi paharul cu vin, în sănătatea Domnului ION IONESCU, a *Gazetei Matematice* şi a concursurilor ei anuale.

* * *

Ne adunăm acum, începând dela orele 18,30 în după amiaza aceleiaşi zile, membri şi concurenţi, în sala dela etaj a restaurantului „Luzana", sala tradiţională a meselor *Gazetei* post-concurs, în care remarcăm acelaşi ceas pe care timpul nu-l mişcă de ani.

Treptat, şi în timp ce D-l Ing. ILIESCU, campionul acestor mese — anul acesta mai mult ca oricând — roboteşte între sală şi oficiu şi împarte ultimele ordine; membrii şi concurenţii se grupează şi regrupează prin... transformări continui, schimbându-şi impresii dela concurs. Concurenţii mai discută unele probleme ce i-au frământat la concurs trecând apoi la problemele din *Gazetă*, membrii, frământă de sigur alte probleme, D-nii profesori BARBILIAN şi PANTAZI vorbesc mai departe despre teorema lui DESARGUES, iar mai încolo alt grup discută despre punctul lui FEUERBACH.

Iar într'un colţ, D-l Ing. AL. STOENESCU predă subsemnatului „parola" de cronicar al mesei comune din acest an.

La un moment dat şi conform parcă unei ordine prestabilite, iau loc în jurul mesei în formă de „U" şi care în cercul nostru, trebue să însemne *unitate;* unitatea în timp între generaţiile matematice crescute de *Gazeta Matematică,* dar şi în spaţiu, de-a-lungul şi de-a-latul spaţiului românesc. Această unitate matematică face să ne adunăm aci pentru o clipă câteva generaţii de pe tot cuprinsul ţării şi pare să arate că pentru *Gazeta Matematică,* un an... e o zi. Intreaga ei istorie şi întregile ei înfăptuiri prezente în fiece clipă, se arată aci mai puternice.

Iau deci loc, în jurul mesei:

D-l General GH. BUICLIU stâlp nou şi definitiv al *Gazetei,* D-ra GABRIELA ŢIŢEICA, D-na OTILIA GEORGESCU-ROEGEN şi D nii: I. S. ANTONIU, AL. BUNESCU, EUGEN BUNESCU, D. BARBILIAN, D. V. CAMBUREANU, V. CAMBUREANU, I. CHIŢULESCU, Lt.-Col. DRAGOMIRESCU-BUZNE, N. I. GEORGESCU, N. GEORGESCU-ROEGEN, AD. GHEORGHIU, ŞERBAN GHEORGHIU, GH. ILIESCU, G. A. IOACHIMESCU, CPT. C. IONESCU-ŢIU, G-ral GH. LITEANU, C. MALCOCI, N. N. MIHĂILEANU, AL. PANTAZI, AL. AL. ROŞU, P. SERGESCU, GH. D. SIMIONESCU, I. STAMATE, GH. I. STAMATESCU, Lt.-C-dor AURELIAN STAN, D. STAN, AL. STOENESCU, D. STOICA, RADU ŢIŢEICA, I. C. VASILIU. Ca invitaţi D-l Director N. GRIGORCEA, pasionatul nostru contabil.

Dintre concurenţi D-nii CLAUDIU BILUSEAC, MARIN CÂRSTEA, MIHAI CONSTANTINESCU, PETRE COLUMBEANU, VASILE DIACONU, RADU SPIRU HARET, VALENTIN LEŢIA, TRAIAN MUSTĂCESCU, CONSTANTIN ROŞU, GH. GH. VRÂNCEANU.

Masa începe prin tradiţionalul ciocnit al ouălelor roşii şi continuă într'o caldă atmosferă de voioşie şi de schimburi de amintiri, iar cartoanele-Menu, tot atât de vechi ca şi concursurile, încep să circule pentru semnături.

Prima cuvântare o rosteşte D-l G-ral GH. BUICLIU: *Tradiţia cere ca primul cuvânt să fie luat de cel mai vechiu membru al „Gazetei". Sunt şi de data aceasta un uzurpator căci mai vechiu decât mine este D-l Ing.* GEORGESCU *care însă îmi cedează cuvântul.*

Primul şi cel mai frumos cuvânt de început este:

Să ne îndreptăm gândul spre cel care trebue să conveargă toate gândurile şi aspiraţiile neamului, către Suveranul Ţării. Ridicând primul pahar să închinăm pentru M. S. Regele Mihai I.

Intreaga asistenţă ovaţionează îndelung şi ascultă în picioare „Trăiască Regele" difuzat în acest moment de un disc.

D-l G-ral BUICLIU continuă:

Reluăm concursurile „Gazetei Matematice" după un an de întrerupere, lipseşte însă dintre noi cel mai bun, fondatorul şi îndrumătorul continuu al „Gazetei Matematice": D-l Prof. ION IONESCU. *Să-i urăm sănătate, să revină cât mai curând în mijlocul nostru. Parte dintre noi ne-am făcut datoria prezentându-ne la dânsul şi urându-i Cristos a Inviat şi grabnică însănătoşire.*

Adunarea ovaţionează pe D-l Prof. ION IONESCU, după care D-l G-ral BUICLIU continuă :

Peste aşteptările noastre concursul de anul acesta a dat rezultate foarte bune, ţinând seama de împrejurările în care s'au pregătit elevii.

Pentrucă dela ultima masă comună au trecut peste noi împrejurări grele, voi povesti cum a apărut „Gazeta Matematică" în anul 1944.

La 4 Aprilie 1944, primul bombardament Casa „Gazetei" a avut de suferit. Se alesese cu dislocări de uşi şi ferestre şi geamuri sparte. Totuşi la 10 Aprilie s'a ţinut şedinţa obişnuită, prezenţi : G-ral BUICLIU. *Am scris atunci în procesul-verbal* „Să dea D-zeu să scăpăm cu atât şi la şedinţa viitoare să fim cel puţin doi".

La şedinţa dela 24 Aprilie prezenţi : G-ral BUICLIU, *Prof,* ŢINO, *Ing.* STOENESCU, *Prof.* I. G. DUMITRESCU, *deci peste urările făcute şi în plus se constată că geamurile sparte au fost puse de o mână nevăzută şi pe care am s'o divulg : era mâna D-lor Ingineri* AL. BUNESCU *şi* D. STAN. *La acea şedinţă s'a hotărît să ţinem o Adunare generală extraordinară întru cât sunt cereri de noi membri, şedinţă pe care D-l Inginer* ILIESCU *reuşeşte s'o convoace pentru 8 Mai.*

La 8 Mai, după bombardamentele de zi şi de noapte din 7 Mai, când case vecine „Gazetei" au căzut la pământ, am ţinut Adunarea generală extraordinară, din nou cu geamurile sparte, prezenţi ; G-ral BUICLIU *şi C-dor* I. LINTEŞ. *Se aleg în...* unanimitate *noii membri : D-na* CALIPSO BOTEZ, *D-nii : Ing.* STAVRI GHIOLU, *Ing.* ION GRIGORESCU *şi Prof.* VALER NOVACU.

In şedinţa dela 29 Mai, prezenţi : G-ral BUICLIU, *C-dor* LINTEŞ, *se constată că se pusese placaje la ferestre, de aceleaşi fee nevăzute D-nii* AL. BUNESCU *şi* D. STAN.

Continuă astfel şedinţele la 5 şi 26 Iunie, la şedinţa dela 10 Iulie apare şi un delegat : D-l Prof. PETRE SERGESCU. *La 24 Iulie prezenţi : G-ral* BUICLIU, *C-dor* LINTEŞ, *Col.* DRAGOMIRESCU-BUZNE, *la 7 August prezenţi : G-ral* BUICLIU, C. IONESCU-BUJOR *şi C-dor* I. LINTEŞ, *la 24 August... nu am fost nici eu.*

Intre timp maşinăria mergea : D-l SERGESCU *mă... bombarda dela Craiova cu scrisori tiranizante, cum şi ce să apară în „Gazetă" ; în Dealul Filaret, vechia obârşie a „Gazetei Matematice" şi unde se retrăsese oarecum, D-l Ing.* ILIESCU *scria adrese, trimetea „Gazeta" celor ce o cereau, pregătea materialul şi dădea la tipar.*

Din toate colţurile ţării membrii se interesau şi trimeteau material pentru „Gazetă".

O singură dată „Gazeta Matematică" a apărut cu o întârziere de 4 zile : pe luna Mai.

Corespondenţii purtau acelaşi interes, continuau să lucreze şi să trimită probleme rezolvate, veneau şi se interesau de apariţia „Gazetei" şi de bibliotecă. Ne întrebăm acum :

De unde acest interes entusiast peste orice vicisitudini, şi această strânsă şi continuă legătură ? Iată de unde, sau aşa cred eu, din începuturile bune, din idealismul sădit dela început la fundamentul pe care a continuat

să se înalțe „Gazeta Matematică". Fiindcă nu e numai o gazetă, ci o instituție de idealism cu rol social. In acel început rezidă puterea — în entusiasmul întemeietorilor și a celor patru stâlpi cari treptat s'au sacrificat. De aceea dau cuvântul singurului stâlp ce ne-a mai rămas, D-lui Prof. ION IONESCU.

Asistența ascultă în tăcere cu privirile adâncite în trecutul victorios al *Gazetei*, cuvântarea *) pe disc a D-lui Prof. ION IONESCU ținut la ședința solemnă dela „Fundația Carol I" în ziua de 17 Decembrie 1935, cu ocazia sărbătorirei celor 40 de ani ai *Gazetei Matematice*. Iată crâmpeie care nu sună numai ca atunci ci pentru totdeauna:

„La întemeierea „Gazetei Matematice" fondatorii ei au organizat-o astfel ca să le supraviețuiască lor".

Motivând apoi sărbătorirea celor 40 ani... prin zicătoarea românului că *„averea nu stă mai mult de 40 ani în aceiași mână"*, spune:

„Găsesc și eu că sărbătorirea de azi are un rost: ea este consacrarea în public a trecerii avutului științific și material al „Gazetei Matematice" dela generațiunea acelora cari au întemeiat-o, la generațiunea de azi, care o va duce mai departe pe calea propășirii și a strălucirii".

D-l G-ral BUICLIU dă apoi cuvântul regretatului Prof. G. ȚIȚEICA, unul din stâlpii *Gazetei* dispăruți dintre noi în ultimii 10 ani.

Intreaga asistență ascultă în picioare cuvintele **) spuse de neuitatul profesor, al nostru, al tuturor, cu ocazia aceleiași sărbătoriri de 40 ani ai *Gazetei* în ședința festivă dela Școala Politehnică din București în aceeași zi de 17 Decembrie 1935. Ne împrospătăm astfel explicația succesului *Gazetei Matematice* prin reunirea fericită a două elemente cu totul deosebite, unul de natură permanentă, altul de natură întâmplătoare:

„Elementul permanent e însăși firea științei matematice, fire cu aparență severă și despre care lumea în general are o părere greșită".

„Născută sub forma pe care o cunoaștem astăzi, în același timp cu arta grecească, matematica a păstrat în țesătura ei, în structura ei intimă, o oarecare afinitate cu arta. E aceeași armonie în Geometria lui EUCLIDE *ca și în templele antice. E aceeași liniște, același echilibru în demonstrația unei teoreme ca în coloanele admirabile de pe Acropolă".*

„Aci stă marea putere educativă a științelor matematice pentru tineret: știință curată pentru suflete curate, știință cristalină, pentru suflete cristaline".

„... „Gazeta Matematică" n'ar fi reușit, dacă n'ar fi existat dela început, unele elemente întâmplătoare, dar hotărîtoare, mai ales dacă la înființarea „Gazetei" nu s'ar fi întâmplat să se strângă împreună un grup de tineri cu spirit temeinic de organizare, cu spirit hotărît de realizare și cu spirit larg de jertfă".

Vorba clară și însorită a lui G. ȚIȚEICA amplificată parcă de *„porticele sonor"* al lui HOMER în tovărășia căruia se va fi găsind acum, ne dă tuturor siguranța permanenței idealului, dincolo de vremelnicii.

---

*) Cuvântarea în extenso este publicată la pag. 275, Vol. XLI.

**) Cuvântarea în întregime este publicată la pag. 317, Vol. XLI.

D-l G-ral BUICLIU dă cuvântul regretatului Prof. Ing. ANDREI IOACHIMESCU, celalt stâlp al *Gazetei Matematice* dispărut dintre noi în ultimul timp: Profesorul IOACHIMESCU ca cel mai în vârstă dintre fondatorii *Gazetei Matematice* în 1935 încheia şedinţa festivă a sărbătoririi celor 40 de ani ai *Gazetei Matematice* *).

După ce am fost conduşi astfel la izvorul *Gazetei Matematice* şi pios ne-am cuminecat cu jertfele înaintaşilor, D-l G-ral BUICLIU încheie:

Iată Domnilor sursa nesecată care întreţine viaţa şi disciplina „Gazetei Matematice". Urez ca această sursă să continue a ne alimenta; iar urmaşii noştri să continue a se folosi de ea.

D-l Ing. AL. BUNESCU luând cuvântul ca o completare a celor spuse de D-l G-ral BUICLIU propune să trimitem D-lui Prof. ION IONESCU următoarea scrisoare:

ONORATE DOMNULE PROFESOR,

Membrii Societăţii „Gazeta Matematică" şi candidaţii la Concursul din 1945, strânşi la masa tradiţională după încheierea lucrărilor Concursului, îşi îndreaptă cu veneraţiune şi cu dragoste gândul către ilustrul Profesor care a condus „Gazeta Matematică" în pragul celui de al 50-lea an, prin credinţa, munca şi abnegaţiunea sa, îi urează multă sănătate şi vieaţă lungă şi îşi exprimă dorinţa să-l aibă în mijlocul lor la serbările cinquantenarului.

Intreaga asistenţă aclamă pe D-l Prof. ION IONESCU urându-i sănătate şi vieaţă lungă, apoi fiecare partîcipant semnează scrisoarea.

Urmează cuvântarea morală a D-lui Ing. STAN.

Domnilor Colegi, Dragi Concurenţi,

După o veche potrivealã, Concursul „Gazetei Matematice" se situiază în „săptămâna luminată".

Nici când, ca de data aceasta, cele mai mari sărbători anuale creştineşti, ale Invierii Domnului, n'au fost iluminate de o sărbătoare mai epocală; ne-a fost dat ca în zilele de Paşti să asistăm la încheierea celei mai mari şi mai sângeroase catastrofe prin care a avut să treacă omenirea, prin cea mai mare victorie ce s'a câştigat vreodată.

O întâmplare fericită a vrut apoi, că a doua zi chiar după sărbătorirea încetării îngrozitorului măcel şi eliberării Europei, să prăznuim pe 10 Mai al nostru, şi să avem prilejul să ne concentrăm asupra punctelor luminoase din istoria noastră naţională şi speranţelor de viitor cristalizate în destinele Dinastiei şi Regelui Mihai I.

La toate aceste sărbători şi bucurii, ca şi la încântările acestei primăveri avansate şi înflorite, Dv. D-lor Concurenţi n'aţi putut lua parte decât cu reţinerea compatibilă cu grijile Concursului „Gazetei". Laudele ce vi

---

*) Cuvântarea în extenso a Prof. A. G. IOACHIMESCU este publicată la pag. 373 Vol. XLI.

se cuvin pentru munca depusă şi sacrificiile ce-aţi făcut sunt cu atât mai bine meritate şi-ar trebui să vă lăsăm măcar acum să daţi curs liber întregului Dv. entuziasm tineresc.

După tradiţia lăsată de marele nostru înaintaş G. ŢIŢEICA. *Imi revine însă rolul să vă reţin încă o clipă dela manifestările de bucurie, pentru a asculta ceea ce s'a obişnuit a se numi „cuvântarea morală" :*

Domnilor, într'o foarte interesantă colecţie de reportaje politice din Europa dinaintea războiului, autorul — un mare ziarist american, — vorbind de conducerea şi personalităţile politice ale Imperiului Britanic, relatează un amănunt pe care eu îl cred caracteristic. Iată-l :

Fostul Prim-Ministru STANLEY BALDWIN *a scris undeva că atunci când pentru întâia oară a fost chemat să formeze guvernul, primul său gând a fost că trebue să-l constitue astfel încât să nu facă ruşine Colegiului Harrow. Amintindu-şi că din Cabinetul precedent făcuseră parte câte patru sau chiar cinci foşti elevi a acelui Colegiu, el s'a hotărît să aibă şase. A învins deci toate greutăţile inerente unei asemenea operaţii delicate şi a avut cei 6 Harrow-iani în Cabinet.*

Şi-a mai notat D-l BALDWIN : *„Cu ajutorul lui D-zeu, în cursul unei activităţi plină de răspunderi şi dificultăţi, nu voi face nimic care să dea ocazie vre unui Harrowian să spună că n'am reuşit să fac tot ce-mi stătea în putinţă ca să ating cele mai înalte idealuri ale Şcolii".*

Vedeţi, Domnilor, câtă importanţă au în Anglia legăturile cu colegii din şcoala secundară şi legămintele faţă de idealurile ce încălzesc tineretul acestor şcoli.

Ştim bine, cu toţii, că nu tot aceeaşi e situaţia şi în România.

Sunt totuşi rare excepţii onorabile şi la noi, şi îmi propun să evidenţiez că între acestea se situtază familia „Gazetei Matematice".

In cei 50 ani de existenţă, „Gazeta" a cimentat, într'adevăr, legături indestructibile cel puţin între două generaţii şi cu voia lui D-zeu sperăm că ele să se stabilească la fel, mai departe, şi să se perpetueze şi la cei ce vin după noi.

Cei patru stâlpi ai „Gazetei" şi colaboratorii lor apropiaţi n'au fost pentru generaţia noastră numai nişte admirabili profesori şi îndrumători pe tărâmul matematicilor, ci şi adevărate călăuze sufleteşti, faruri luminoase către care se îndreaptă ochii neîncetat, în toiul luptelor vieţii. Exemplul lor de muncă desinteresată şi perseverentă, idealismul lor nedesmintit, patriotismul lor cald şi neostentativ, au creat atmosfera permanentă şi învăluitoare a acestei modeste „Gazete Matematice".

In ce mă priveşte, mărturisesc că în toată activitatea mea, de când am intrat în vechea Şcoală de Poduri şi Şosele şi până azi, n'a fost ocazie mai însemnată în care să nu fiu preocupat de judecata marelui nostru Profesor, D-l ION IONESCU. *Ce-ar zice el dacă ar şti cum m'am comportat în diverse momente sau cum am rezolvat anumite probleme tehnice, a fost şi este şi azi o întrebare nelipsită cel puţin din subconştientul meu.*

La fel m'a urmărit — şi sunt sigur că a influenţat şi pe toţi colegii din generaţia mea, — ascendentul incomparabilei personalităţi a savantului

care-a fost GEORGE ŢIŢEICA. *Chiar şi în acest moment, când încerc să implinesc golul ce-ar fi să rămână fără tradiţionala lui cuvântare morală, totdeauna aşteptată pentru originalitatea, pentru gândirea înaltă şi pentru cunoscutu-i talent atât de fin, — mă stăpâneşte îndoiala aprecierii lui ipotetice că sunt sau nu în nota justă pe care el o găsea cu măreţie, în cele câteva cuvinte, iluminate de neuitatul lui zâmbet.*

Iar dela celălalt neîntrecut Profesor, blândul şi dreptul ANDREI IOACHIMESCU, *să vă spun doar că păstrez ca pe un mic giuvaer o apreciere din ultemile luni ale vieţii lui, pentru atitudinea pe care am avut-o într'o chestiune ce-i stătea la inimă, ca şi mie, în legătură cu Şcoala Politechnică. Sunt sigur că toate acestea se potrivesc întocmai pentru foarte mulţi din cei din generaţia mea cari şi-au legat o părticică din sufletul lor de „Gazetă" şi cari s'au simţit întotdeauna legaţi şi între ei, — datorită „Gazetei" — prin legături indestructibile.*

Aş vrea să înţelegeţi prin urmare, dragi Concurenţi, ce fel de familie spirituală este „Gazeta Matematică".

Legaţi-vă şi voi, de ea, nu numai pentru posibilităţile ce vă oferă pentru sporirea bagajului matematic, ci şi pentru înalta ei valoare morală şi străduiţi-vă să serviţi idealurile pe care ea le cultivă cu modestie, dar cu neînvinsă perseverenţă.

Vom fi cu toţii larg răsplătiţi dacă mai târziu, în împrejurări ce vă vor crea probleme de conştiinţă, veţi fi preocupaţi şi voi de gândul că sunteţi ţinuţi să nu faceţi nimic de care să se ruşineze familia „Gazetei" noastre şi toţi colegii voştri de-aici şi că aveţi datoria să urmăriţi realizarea comandamentelor ei spirituale, de care prea mult se îndepărtase tineretul în anii din urmă.

Trăiască „Gazeta Matematică" şi toţi credincioşii ei!

Din dreapta D-lui G-L BUICLIU se ridică D-l Prof. P. SERGESCU care spune următoarele:

Insărcinarea efemeră de delegat al *Gazetei Matematice* îmi impune datoria de a vorbi în această seară. Suntem în anul jubilar, al cincizecilea, al existenţei neîntrerupte a *Gazetei Matematice*. Cei cari ne găsim în colţul din spre locurile „de onoare" ale mesei, eram aproape toţi în colţul celălalt, al vostru, al tineretului concurent, acum treizeci şi trei de ani. Acolo unde sunteţi voi acum, ne găseam, plini de speranţe, de entuziasm şi de admiraţie pentru opera *Gazetei*, cei adunaţi acum lângă D-l General BUICLIU. Erau ŞERBAN GHEORGHIU, AL. PANTAZI, C. C. TEODORESCU, AL. BUNESCU, D. STAN, DAN BARBILIAN, I. CHIŢULESCU, T. MAREŞ, pentru a nu numi decât pe cei aşezaţi astă seară mai aproape de mine. Generaţiile ce urmează, anii ne-au făcut să schimbăm cu încetul locurile din colţul vostru, spre colţul direct opus al mesei. Dar sufletul nostru a rămas acelaşi. In ciuda anilor, simţim la fel ca acum treizeci şi trei de ani, avem aceleaşi speranţe şi acelaşi entuziasm. Căci sufletele noastre s'au călit în focul sacru al iubirii de adevăr şi de muncă cinstită, în idealul de abnegaţie şi sacrificii, pe care ni le-a insuflat şi întărit scumpa noastră *Gazetă Matematică*. Nu se va putea spune niciodată îndeajuns cât de mari sunt meritele creatorilor şi „stâlpilor" *Gazetei*

neuitații G. ȚIȚEICA, A. G. IOACHIMESCU, V. CRISTESCU, și veneratul ION IONESCU. Ei au făcut din *Gazetă* nu numai o școală de inițiere în tainele gândirii și metodei matematice, dar au ridicat-o la rostul de făuritoare de caractere. Poate că acest rost este cel mai de seamă căci, mai ales în timpurile extrem de grele pe care am avut să le străbatem, tăria de caracter și conduita morală dreaptă, fără compromisuri și slăbiciuni, sunt mult mai trebuitoare propășirii Neamului nostru Românesc, decât cunoașterea cătorva teoreme în plus. De altfel, educația morală pe care ne-a făcut-o *Gazeta Matematică* era călăuzită de contemplarea senină a adevărului deplin, a adevărului cristalin și curat, contemplare pe care *matematica* o insuflă ucenicilor ei. Grație acestei educații morale, spiritul *Gazetei Matematice* s'a bucurat de *continuitatea* admirabilă, care leagă într'o familie spirituală indestructibilă cincizeci de generații de corespondenți.

Această *continuitate* se traduce în astă seară prin translație continuă pe care o suferim. Din locurile începătorilor, spre cele ale redactorilor, până când, noi vom trece de pe acest pământ urmând ca voi să ne luați locul și să transmiteți elevilor voștri flacăra sfântă a iubirii de știință, de neam și de ideal moral, pe care au aprins-o și ne-au încredințat-o creatorii *Gazetei*. Aceași *continuitate* se învederează în oricare manifestare a revistei noastre. Când, în anul trecut bombardamentele și greutățile războiului, ne-au risipit în toate colțurile țării, ședințele lunare tradiționale au continuat, chiar dacă a fost prezent la ședință un singur membru, D-l General G. BUICLIU, actualul „stâlp" (alături de D-l ION IONESCU) al *Gazetei*. Iar stricăciunile succesive cauzate de bombardamente se reparau ca prin farmec, grație atenției plină de grijă a D-lor BUNESCU și STAN.

Prin spiritul creat de *Gazeta Matematică*, am înțeles că singura și adevărata avere a fiecăruia din noi este *ceea ce a dat altora* în timpul vieței. Căci toate averile adunate pot fi sfărâmate de cutremure, de bombardamente, sau de cataclisme. Așezările noi ale societății le pot reduce la nimic valoarea. Dar sufletul pe care l-ai dat, trăiește în sufletul celui care primește. Iar când noi ne vom fi terminat rostul pe pământ, voi tineretul, devenit matur, veți păstra în tezaurul vostru sufletesc și este o piatră scumpă strecurată de înaintașii cari au știut să dea. Și astfel, înaintașii vor trăi în sufletele voastre; bunul acesta nu poate fi distrus de niciun cataclism sau răsturnare. Iar, prin voi, el va fi transmis urmașilor voștri, și va constitui astfel un *bun nepieritor* pentru cel care a știut să-și *adune* astfel de bogății, *dând* fără precupețire, din comoara sufletului său.

Munca și jertfa care stau la temelia *Gazetei Matematice* sunt în același timp nădejdea noastră în progres. Este o fatalitate dureroasă că omenirea sângerează groaznic în urma unor catastrofe cum a fost nebunia războiului din ultimii șase ani. Dar, din ruinele fumegânde, din cenușa rămasă după prăpăd, omenirea de mâine va reconstitui civilizația, iar curba progresului va merge ascendent. Ea poate prezinta ondulațiuni, dar merge mereu în sus. Când o mână de oameni superiori au putut insufla continuitatea și tenacitatea *Gazetei*, care se luptă cu toate greutățile și isbutește să învingă și să apară și mai strălucitoare, prin însuși focul luptei duse, când astfel de pilde mân-

gâietoare ne fac să uităm grozăviile trecute, razele speranței în mai bine, în progres, ne încălzesc sufletele. Ele ne dau aripi noi să ne avântăm pe calea muncii neprecupețite și desinteresate. Fiecare să aducă pietricica sa, mare sau mică — după cum a orânduit Dumnezeu — în clădirea științei și societății omenești. Aceasta e adevărata avere pe care și-o strânge.

Gazeta Matematică luptă azi cu greutăți mari. Costul tipăririi unui singur număr este 250.000 lei, deci cam trei milioane pe an. Din abonamentele de 1000 lei abia se adună a șasea parte din această grea cheltuială. Și totuși, *Gazeta* apare și va apărea. Drept chezășie pentru aceasta stă coeziunea și spiritul de jertfă al familiei care e societatea *Gazeta Matematică*. Și mai ales, garanția de reușită o avem în spiritul de echilibru și de cruțare al cerberului nostru, casierul AL. BUNESCU, căruia-i aducem aci mulțumiri pentru activitatea grea depusă la *Gazetă* (unde e ajutat de D-l Grigorcea). Iar pentru frumoasa tipărire a revistei, pentru munca migăloasă și continuă de corecturi tipografice, trebue să exprimăm toată recunoștința noastră D-lui Ing. GH. ILIESCU. De altfel și minunata masă de astă seară e încă o probă a solicitudinii și spiritului gospodăresc și dragostei pentru tradiția *Gazetei*, de care dă necontenit dovadă D-l GH. ILIESCU. Mulțumirile noastre se îndreaptă și către D-l STERIU, patronul localului în care ne simțim așa de bine, ca în o adevărată familie.

Cu ocazia concursului *Gazetei*, rectorul Politechnicei, colegul nostru N. CIORĂNESCU ne-a dat — tot conform tradiției — sălile Politechnicei. Li aducem mulțumirile noastre. De asemeni, direcția Căilor Ferate, grație intervenției colegului nostru I. CHIȚULESCU, ne-a dat biletele de tren pentru concurenții lipsiți de mijloace. Le mulțumim cu toată căldura.

Dar mulțumirile noastre se îndreaptă mai ales către membrii *Gazetei Matematice*, cari prin prietenia, iubirea, munca și sacrificiile lor voioase, ne îmbogățesc inimile și ne alungă gândurile negre, obligându-ne să urmăm până la capăt, dârz, drumul început. De asemeni examinatorii dela concurs și voi tineri candidați, v'ați sacrificat odihna vacanței ca să veniți să lucrați împreună cu noi la opera bună, la opera mare, a comuniunii prin știință și la ducerea tot mai sus și mai departe a idealurilor *Gazetei Matematice*, de progres prin muncă neînfricată, continuă și prin iubire de tot ce e adevărat, bun și frumos. Vă mulțumim. Și, să trăiți.

Și să munciți cu toții ca spiritul *Gazetei Matematice* să pătrundă cât mai adânc în toate manifestările vieții publice și naționale a Țării Noastre. Când va pătrunde peste tot acest spirit al *Gazetei Matematice*, vom fi ajuns să realizăm idealul unei țări tari, frumoase și consolidate sufletește, care să poată rezista în veci furtunilor, îndeplinindu-și pe meleagurile acestea, un rol de pion al civilizației și omeniei, rol care e adevăratul rost al oricărei națiuni

Să ne ajute Dumnezeu!

Aplauze puternice subliniază cuvintele frumoase ale D-lui Prof. PETRE SERGESCU, cuvinte care au făcut să ne simțim cu toții integrați în unitatea veșnică a *Gazetei Matematice*.

Din partea concurenților, vorbește D-l PETRE COLUMBEANU, elev în clasa VIII-a a Colegiului „Nicolae Filipescu" dela Predeal:

Domnilor Profesori,

« Noi, elevii suntem cât se poate de mulțumiți că mersul lucrurilor a făcut ca în calitate de concurenți să putem lua parte la această sărbătorire și comemorare de 50 ani dela înființarea Soc. Gazetei Matematice *și ținem să mulțumim comitetului de conducere pentru invitația ce ne-a făcut la această masă comună.*

In aceste momente ne stăpânesc sentimente de admirație și recunoștință.

Admirație avem pentru tot ce a creat Soc. Gazeta Matematică *dela înființarea ei în 1895 și până azi. In decursul acestui timp lung și foarte frământat de tot felul de evenimente istorice s'a văzut baza pe care a fost fondată această societate.*

Recunoștință avem pentru acei ce luptând fără răgaz în mod cu totul desinteresat, s'au pus în slujba unui frumos ideal cultural și științific la care cu mulțumire am luat parte și noi cei tineri prin revistă și prin concursurile anuale.

Această acțiune a lor nu a slujit numai științei ci și națiunei.

Ca națiune nici nu ne putem afirma calitățile pe niciun tărâm mai mult decât pe tărâm cultural.

Ca și cei cari au înființat și au lucrat pentru Gazeta Matematică *vom înțelege acest adevăr și vom căuta ca urmând exemplul și îndemnul înaintașilor noștri să ducem mai departe făclia științei și culturii pusă în slujba afirmării Neamului Românesc ».*

Prin aplauze prelungite întreaga asistență remarcă vigoarea sentimentelor cu care tineretul ține să se încadreze în familia *Gazetei Matamatice.*

O voie bună generală stăpânește toată masa. Intre care, dintr'odată ecte aclamat D-l Ing. D. STOICA: „Să trălască Moș-Crăciun", In adevăr D-l Ing. D. STOICA a împământenit la concursurile gazetei o tradiție pe a sa răspundere: împarte daruri în afară de premiile societății la toți concurenții. Și acum, asistența vrea să-i audă măcar vorba sfătoasă, severă dar blândă ca unui adevărat Moș-Crăciun:

D-l Ing. D. STOICA nu mai are ce face și se mărturisește:

Am încă o datorie față de anii trecuți, când am cerut concurenților să-mi predea liste de cărțile ce-i interesează Aci a stat o greutate, mi-au cerut cărți ce nu se mai găseau sau pe vremurile acestea imposibil de procurat. Am găsit eu câte ceva — dacă nu chiar ce trebuia — mai vechi, mai dela unul, mai dela altul, am dat atunci și dintre cărțile mele. Observând probabil unii din concurenți după ce le-au citit că le au, mi le-au restituit.

Am făgăduit apoi cursul de mecanică a lui IOACHIMESCU *ce trebuia să apară sub îngrijirea D-lui Ing.* STOENESCU.

Totuși obiceiul nu-l părăsesc, dar am să-l schimb și rog pe candidați să-și schimbe puțin obiceiul. Țin deci la dispoziție 45.000 lei, câte 3.000 lei pentru cei 15 candidați admiși la oral și fiecare să-și cumpere ce cărți vrea

din biblioteca Gazetei Matematice. *Pe deasupra am să împart din « Povestirile Technice ale D-lui Prof.* Ion Ionescu ».

Asistența aplaudă și mulțumește lui Moș-Crăciun care a găsit o nouă soluție tradiției creiate de D-sa.

D-l Prof. Petre Sergescu mulțumește D-lui Ing. Stoica din partea delegației pentru frumosul său dar.

D-l G-ral Buicliu ne amintește:

In 1936 la masa comună am observat că aveam o „soluție singulară", anume printre concurenți era și o concurentă. Am exprimat dorința să se multiplice acest gen de soluții. Azi avem în societate și membre femei. Inchin paharul pentru domnișoarele și doamnele colege membre dintre care două, D-na Otilia Georgescu Roegen și D-șoara Gabriela Țițeica s'au ostenit mult ca examinatoare la concurs. Le mulțumim și le facem cele mai bune urări.

Asistența subliniază, ovaționând pe D-na Georgescu Roegen și D-ra Țițeica.

* * *

Intr'o însuflețire tinerească pe care a știut întotdeauna s'o propage D-l Prof. Petre Sergescu, d-sa dă semnalul corurilor pentru ca și pe această cale, a muzicei, întreaga asistență să-și topească sentimentele în Unitatea *Gazetei Matematice*. D-sa ia conducerea corului din coada stângă a mesei și corul se generalizează ușor la masa întreagă.

Creștinește în această săptămână luminată în care s'a anunțat Pacea și în care *Gazeta* își reia tradiția, corul începe cu un puternic „Cristos a Inviat".

Urmăm apoi cu un „Gaudeamus igitur" pentru a cimenta legătura între membri și corespondenți, după care trecem la un cântec românesc: „De-ar fi mândra".

In colțul nostru se spune că mândră ar fi *Gazeta Matematică.*

Și cântecele n'ar mai conteni, ca și discuțiile și amintirile dacă orele n'ar fi înaintate și dacă D-l G-ral Buicliu n'ar încheia tradițional această masă comună urând pentru la anul un concurs și mai reușit.

Intreaga asistență îndreptându-se spre ieșire inclusiv corul, mai cântă încă un puternic „Pe-al nostru steag" și un înălțător „Trăiască Regele".

Adrian Gheorghiu.

REZULTATUL CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1945

Una dintre cele mai frumoase tradiţii ale *Gazetei Matematice* o constitue, fără îndoială, concursurile anuale între elevii liceelor civile şi militare, care au loc cu regularitate în vacanţa Sf. Paşte.

Linia acestei tradiţii a prezentat anul trecut un punct de discontinuitate datorită gravelor evenimente prin care a trecut ţara şi necesităţii de a pune copiii la adăpost faţă de pericolul aerian. Anul acesta am putut relua firul şi concursul s'a ţinut la data anunţată (10 Mai) în localul Şcoalei Politechnice.

Au fost admişi a participa la concurs 35 elevi din cari 16 dela liceele civile şi 19 dela liceele militare. La prima lucrare scrisă au fost însă *11 absenţi* şi din aceştia numai D-nii: GOLDIŞ GH. clasa a VIII-a şi LEON A. MIHAIL clasa a VII-a au anunţat la timp că nu pot veni. Înţelegem greutăţile de toate felurile ale vremurilor de faţă, începând cu cele de transport, dar *Gazeta Matematică* preţueşte şi latura morală şi din acest punct de vedere ţine ca cei ce nu-şi pot împlini obligaţia luată, să înştiinţeze înainte. Aşa e corect.

După cercetarea lucrărilor scrise, au fost admişi 15 elevi la oral. Printre aceştia unul a fost primit în mod excepţional, — deşi lucrarea de algebră a fost *foarte slabă* — deoarece lucrarea de mecanică a fost *foarte bună* şi comisiunea a ţinut să-l vadă la oral.

Examinarea orală a avut loc în zilele de 11 şi 12 Mai. Comisiunea examinatoare a fost formată din: D-na OTILIA GEORGESCU ROEGEN pentru *algebră* la clasa a IV-a şi a V-a, D-l C-DOR AURELIAN STAN pentru *geometrie* la clasa a IV-a şi a VI-a, D-l CPT. C. IONESCU-ŢIU pentru *aritmetică* la clasa a V-a şi *teoria numerelor* la clasa a VI-a, D-l GH. D. SIMIONESCU pentru *trigonometrie* la clasa a VI-a, D-l C. IONESCU-BUJOR pentru *algebră* la clasa a VII-a şi a VIII-a, D-l I. CHIŢULESCU şi AL. PANTAZI pentru *geometria descriptivă* şi *proiectivă* la clasa a VII-a, D-l ŞERBAN GHEORGHIU pentru *geometria analitică* la clasa a VIII-a şi D-ra GABRIELA ŢIŢEICA pentru *mecanică* la clasa a VIII-a.

In afară de membrii comisiunii s'au mai interesat de mersul concursului, aşa cum cere tradiţia, mulţi membri ai *Gazetei*, urmărind probele scrise sau orale, unii luând parte chiar activă la examinare. Anume D-ra ALEXANDRA BĂDULESCU şi D-nii: I. S. ANTONIU, D. BARBILIAN, G-L GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, AD. GHEORGHIU,

GH. ILIESCU, G-L GH. LITEANU, EM. MEREUȚĂ, N. N. MIHĂILEANU, P. MIRESCU, TR. POPP, AL. A. ROȘU, P. SERGESCU, I. I. STAMATE, GH. STAMATESCU, I. STAMATESCU, AL. STOENESCU, D. STOICA, C. C. TEODORESCU și I. C. VASILIU.

In afară de membri *Gazetei Matematice* au mai asistat D-nii: Ing. BĂLĂCEANU, (subdirectorul administrativ al Sc. Polit.) și Prof. AUREL BOTEANU.

Cu toată asistența destul de numeroasă, am simțit cu toții lipsa D-lui Prof. Ing. I. IONESCU, păstrătorul tradițiilor și îndrumătorul nostru al tuturor.

Ținem să spunem câteva cuvinte, și despre felul cum s'au prezentat concurenții. Unele lucrări scrise au fost neîngăduit de slabe pentru corespondenți ai *Gazetei*. Astfel la *trigonometrie* n'a făcut nimeni proba dată, apoi lucrări foarte slabe au fost la *teoria numerelor, algebra* clasa a VII-a și a VIII-a și la *geometria descriptivă*.

In general concurenții pe care i-am avut la oral s'au dovedit că stăpânesc bine materia ce li s'a cerut, chiar și cei ce n'au fost premiați. De sigur însă că cei premiați sau menționați au avut vederi mai largi, au dovedit siguranță mai multă, spirit de observare, etc.

Toți candidații de clasa a VIII-a s'au înfățișat bine pregătiți și la geometria analitică și la mecanică, deși au avut de citit singuri peste programa analitică. S'a constatat totuși o lipsă a spiritului geometric, deoarece considerațiile analitice au fost însoțite de prea puține observațiuni geometrice. Spre deosebire de clasa a VIII-a, elevii de clasa a VI-a cu excepția primului premiant — s'au prezentat slab.

Ținând seama de condițiile grele în care s'a făcut școală de câțiva ani și în special de întreruperea timpurie a anului școlar trecut, când nici nu s'a terminat materia, suntem mulțumiți că dragostea de matematici a făcut pe tinerii corespondenți ai *Gazetei Matematice* să înfrângă greutățile ce le-au stat în cale și de aceea noi, la rândul nostru, le mulțumim din toată inima.

Iată acum rezultatul concursului.

I. Premiul întâiu a fost obținut de D-l SORIN F. DUMITRESCU din clasa a VI-a a Colegiului național „Sf. Sava" din București. Excelentele probe scrise ca și oralul de teoria numerelor l-au indicat pentru acest loc. I se dă ca premiu volumele: A. ANGELESCU:

Lecțiuni de calcul diferențial, „Gazeta Matematică“: *Volum jubilar*, M. GHERMĂNESCU: *Trigonometria plană și sferică*, I. IONESCU: *Beton armat*, V. MARIAN: *Elementele lui* EUCLID Vol. I, II și III, P. MONTEL: *Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes*, recueillies et rédigées par P. SERGESCU și GH. VRÂNCEANU: *Curs de geometrie analitică și proiectivă*.

II. In al doilea rând s'a clasificat D-l TRAIAN MUSTĂCESCU, elev în clasa a VIII-a a liceului de aplicație „Titu Maiorescu“ din București, care a avut ambele probe de mecanică — scris și oral — excelente, iar cele de geometria analitică foarte bune. I se dă ca premiu volumele: „Gazeta Matematică“: *Volum jubilar*, M. GHERMĂNESCU: *Trigonometria plană și sferică*, I. IONESCU: *Maxime și minime geometrice*, V. MARIAN: *Elementele lui* EUCLID Vol. I, II și III, P. SERGESCU: *Quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France*, G. VRÂNCEANU: *Curs de geometrie analitică și proiectivă*.

III. Premiul al treilea a fost acordat D-lui MIHAI R. CONSTANTINESCU, elev în clasa a VII-a a liceului „Sf. Petru și Pavel“ din Ploiești, ale cărui probe atât de algebră cât și de geometria descriptivă, îl așează aproape pe aceeași linie cu precedentul. I se dă ca premiu volumele: V. COȘNIȚĂ: *Coordonnées barycentriques*, „Gazeta Matematică“, *Volum jubilar*, I. IONESCU: *Beton armat*, V. MARIAN: *Elementele lui* EUCLID Vol. I, II și III, P. SERGESCU: *Quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France*.

IV. Premiul al patrulea s'a atribuit D-lui MARINEL C. MARINESCU, elev în clasa a VIII-a a Colegiului național „N. Filipescu“ Predeal. Ambele sale probe de mecanică și oralul de geometrie analitică au fost foarte bune. Primește ca premiu volumele: „Gazeta Matematică“, *Volum jubilar*, M. GHERMĂNESCU: *Trigonometria plană și sferică*, I. IONESCU: *Beton armat*, TR. LALESCU: *La géometrie du triangle*, P. SERGESCU: *Quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France* și G. SUGOT: *Balistique intérieure théorique et tables numériques*.

V. In al cincilea loc s'a clasificat D-l LETIA VALENTIN, elev clasa a VIII-a a liceului „Sf. Iosif“ din București, pentru oralul excelent de mecanică, lucrarea scrisă de mecanică foarte bună și oralul bun de geometrie analitică. I se dă ca premiu: C. COȘNIȚĂ:

Coordonées barycentriques, „Gazeta Matematică", *Volum jubilar*, I. IONESCU: *Maxime şi minime geometrice*, TR. LALESCU: *Calculul algebric* şi P. SERGESCU: *Quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France.*

In afară de cei de mai sus, au fost concurenţi cari s'au evidenţiat numai la o materie sau chiar la una din probe şi pentru aceasta li se acordă *menţiuni*. Aceştia sunt în ordinea crescândă a claselor din care fac parte.

Clasa a IV-a. CLAUDIU GR. BILUŞEAC (liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti) pentru oralul de algebră. I se dă V. I. BĂDULESCU: *Table de logaritmi* şi „Gazeta Matematică", *Volum jubilar.*

Clasa a VII-a. GH. GH. VRÂNCEANU (liceul militar „Mihai Viteazul", Timişoara) pentru ambele probe de geometrie descriptivă şi proiectivă. I se dă: I. I. CHIŢULESCU: *Culegere de probleme de geometrie descriptivă* şi I. IONESCU: *Beton armat.*

Clasa a VIII-a. PETRU COLUMBEANU (Colegiul naţional „N. Filipescu", Predeal) şi CRISTU CANTUNIAR (liceul „Titu Maiorescu"), ambii pentru mecanică.

Primul va primi „Gazeta Matematică", *Volum jubilar* şi I. IONESCU: *Beton armat*, iar al doilea M. GHERMĂNESCU: *Trigonometria plană şi sferică* şi GABRIELA ŢIŢEICA & AL. STOENESCU: *Teoria giroscopului şi aplicaţiile sale technice.*

Pe lângă premiile şi menţiunile de mai sus, D-l Ing. D. STOICA a oferit din partea sa personală tuturor celor 15 concurenţi admişi la oral, cărţi din biblioteca *Gazetei Matematice.* In acest scop D-sa a pus la dispoziţia *Gazetei* suma de 45.000 lei din care să se acopere costul cărţilor în valoare de 3.000 lei pentru fiecare concurent, pe care le vor cere după dorinţa lor.

In fine tot D-l Ing. D. STOICA a oferit tuturor candidaţilor admişi la oral câte un volum I. IONESCU: *Povestiri technice*, Vol. I, care se poate ridica oricând dela sediul societăţii. Aducem D-lui Ing. D. STOICA mulţumiri atât din partea elevilor, cât şi a membrilor societăţii *Gazeta Matematică.*

De asemenea aducem mulţumiri D-lui rector al Şcoalei Politechnice Bucureşti, pentru găzduirea ce ne-a dat în tot timpul concursului.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
GH. D. SIMIONESCU.

ERORILE DE TIPAR IN CĂRȚILE DE MATEMATICĂ

In *Gazeta Matematică*, ca și în orice altă Revistă sau Carte de Matematică care nu a avut mai multe ediții, s'au publicat și se vor publica și de aci înainte chestiuni și mai ales probleme, care conțin erori. Proveniența acestora poate fi datorită unui studiu incomplet sau insuficient al chestiunilor, din scăpări de vedere la raționamente sau la calcule, din interpretări eronate ale manuscriselor de către culegători, corectori și revizori, mai ales dacă nu au fost scrise destul de clar; în fine din erori propriu zis tipografice, care au rămas neobservate la corecturi, sau, dacă au fost semnalate, s'au omis, — cu sau fără voința —, de a se corecta.

Asemenea erori, când nu se pot descoperi imediat, dau de sigur mult de lucru celor care se ocupă cu studiul chestiunilor, sau mai ales cu rezolvarea problemelor în care se găsesc *erori de fond* sau *erori de tipar*, încât evident că asemenea erori trebuesc evitate pe cât este posibil. Este însă cert că ele nu se pot evita cu totul, oricare ar fi atențiunea care s'ar da la studiul chestiunilor, la redactarea și la tipărirea lor. In această privință *„Erare humanum est“* este o axiomă tot atât de evidentă ca și *„Totul este egal cu suma părților sale“*. Din această axiomă s'au scos și următoarele teoreme:

„O carte fără eroare este o chimeră“ (CRAPELET).

„Este imposibil a imprima o carte fără greșeli“ (ROCCA).

„Erorile tipografice s'au înmulțit atât de mult încât nici nu se mai fac erate din cauză că ele ar face concurență ultimelor capitole prin întinderea lor“ (RICHARD).

Să nu se creadă că claritatea manuscriselor micșorează erorile, căci cu cât un manuscris este mai bine scris, mai citeț, cu atât se dă să se culeagă de lucrători mai noi, mai puțin experimentați. Din această pricină s'a și zis, cu drept cuvânt, că pentru scriitor, paradisul este când concepe lucrarea, purgatoriul când o scrie și iadul când face corecturile tipografice. Cine nu crede poate cere dela *Gazeta Matematică* probe foarte caracteristice și convingătoare.

Culegătorii care au un simțimânt estetic și o conștiință a datorii desvoltată sunt rari. *Gazeta Matematică* a avut parte de asemenea corectori, printre cari menționăm pe unul, IORDAN MIHĂILESCU

dela Tipografia *F. Göbl & Fii.* Atenţiunea pe care o punea dânsul la culegerea formulelor, expresiunilor algebrice, ecuaţiilor, tabelelor era extraordinară. Ca să se vadă până unde mergea cu atenţiunea la cules, este destul a spune că odată, pe o corectură în dreptul unei formule, îmi scrie că să bag de seamă că formula trebue să fie greşită. In acea formulă era şi o integrală, pe care nu un culegător ca IORDAN, cu câteva clase primare, dar niciun licean nu o putea pricepe. Am comparat formula cu cea din manuscrisul autorului şi am găsit că a fost culeasă perfect. Nu am avut timp să verific calculele autorului şi neputând conta pe afirmaţiile unui necunoscător în matematici, că formula este greşită, am lăsat-o neschimbată. Am rămas însă surprins de unde a scos culegătorul ideea că formula nu e bună, şi de aceea a doua zi am dus eu corecturile la tipografie, am chemat pe culegător şi l-am întrebat ce l-a făcut să creadă că formula este greşită! I-am spus că ea este bine culeasă după manuscris şi îmi răspunde că nu a greşit el, ci autorul articolului! L-am întrebat să-mi spună ce-l face să creadă că este acolo o greşeală şi mi-a răspuns că el este sigur că este greşită, deoarece de când culege el matematică nu a cules niciodată semnul integralei $\int$ fără ca după el să nu vină şi un *d*. Şi în adevăr autorul uitase să scrie în manuscris diferenţiala variabilei sub semnul $\int$, care se putea restabili imediat de un cunoscător. Dar câţi observatori de aceştia se întâlnesc azi? Şi fiindcă ei sunt rari, erorile tipografice sunt dese.

Experienţa pe care am făcut-o la *Gazeta Matematică* timp de 50 de ani m'a făcut să mă gândesc la această chestiune şi să o studiez, mai ales că reclamaţiile contra erorilor de tipar în *Gazeta Matematică* dau loc la plângeri dese şi proteste chiar tari, uneori. Rezultatele cercetărilor făcute le dau aci pentru folosul celor ce studiază, redigează sau tipăresc matematică.

Pentru ca studiul erorilor tipografice la matematici să fie mai complet am utilizat eratele mai multor cărţi şi Reviste matematice, în special *L'intermédiaire des Mathématiciens*, tipărită la una din cele mai renumite case de editură pentru matematici din lume, anume *Gauthier Vilars* din Paris. La această revistă au scris cei mai mari matematicieni din toată lumea, nu pentru reclamă, ci tocmai din contră, spre a cere altora să le rezolve unele chestiuni de specialitatea cărora nu se ocupau propunătorii chestiunilor.

In o publicaţiune matematică se găsesc foarte multe feluri de erori. Voi lăsa la o parte pe cele de exprimare, de gramatică de ortografie, de punctuaţie, de insuficienţa explicaţiilor sau demonstraţiilor, şi voiu vorbi puţin de cele *de fond* şi mai pe larg de cele *tipografice.*

*

Erorile de fond sunt rezultatul insuficienţii şi neglijenţii la studiu; lăsând bine înţeles la o parte incapacitatea, căci aci ne ocupăm de scriitorii de bună credinţă. Ne mărginim dar la erorile ce provin din lipsă de atenţie la studiu, de vreo plictiseală la calcule, din neobservare la interpretarea rezultatelor.

Ca primitor de reclamaţii ani îndelungaţi la *Gazeta Matematică* am constatat că tinerii corespondenţi, începătorii în studiul matematicilor, nu se împacă de loc cu ideea neexactităţilor în matematică! Cei cari lucrează serios şi caută să creeze, îşi dau seama de posibilitatea erorilor, căci văd că unele chestiuni, trimise spre publicare la reviste, nu se anunţă, nu apar, sau apar cu modificări mari, cu soluţiuni noi, neaşteptate, foarte depărtate de schiţa de soluţie trimeasă, etc. Cine produce face şi greşeli; cine nu produce nimic, nu greşeşte niciodată!

Pe când eram elev în Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele clasa mea convenise să se noteze în un carnet toate greşelile pe care le făceau elevii la convorbiri, studii, discuţii, proiecte, etc., în scopul de a ne face să ne gândim mai mult când spunem, scrim, calculăm sau desenăm ceva. După câteva luni se făcea o statistică, ca să se vadă clasificarea după numărul erorilor din carnet. Atunci s'a constatat că unii din colegi nu figurau de loc în acel carnet, pe când chiar cei dintâiu la clasificaţie figurau cu destule erori. Intrebând pe unul din cei fără erori cum îşi explică acest fenomen, răspunde că de când s'a înfiinţat carnetul nu mai sta de vorbă cu noi! Bine înţeles că această afirmaţie a compensat toată lipsa acelui coleg din carnet! Să nu se creadă că această poveste este alcătuită pentru scopul acestui articol. Carnetul de care vorbirăm a fost tipărit în 1894 sub titlul: „*Mărgăritare*".

Pentru a vedea la ce confuzii dau loc neatenţia la studii şi la redactare a chestiunilor de matematică, voi da aci câteva exemple. Ele sunt toate *reale*, scoase din publicaţii matematice, ca şi toate exemplele ce urmează; nimic nu este aranjat sau imaginat

de mine. Scrim pe o linie cuvântul tipărit eronat şi pe a doua cum ar fi trebuit scris:

scris:	*proporţional*	*normală*	*ascuţit*	*stânga*	*mare*	*da*
în loc de:	*invers proporţional*	*tangentă*	*Obtuz*	*dreapta*	*mic*	*nu*

scris:	*totdeauna*	*interior*	*divizor*	*buclă*		*mărime*
în loc de:	*niciodată*	*exterior*	*multiplu*	*ramură*	*infinită*	*raport*

Cu alte cuvinte în manuscris s'a pus tocmai invers de cât trebuia!

Tot din aceleaşi motive s'a scris:

scris:	*întreg*	*numere*	*cerc*	*segment*	*două*	*Cracovia*	*elipsoizi*
în loc de:	*impar*	*patrate*	*semicerc*	*coardă*	*patru*	*Varşovia*	*elipse*

Apoi memoria slăbeşte uneori şi se uită definiţiuni sau proprietăţi şi de aceea se găsesc denumite *lemniscate, melc al lui* PASCAL, *Cerc al lui* MONGE unele curbe care nu au nimic a face cu aceste curbe. Tot aşa găsim CESARO în loc de DELANNOY; *Liège* în loc de *Leyde; americană* în loc de *engleză; Iunie* în loc de *Ianuarie,* etc.

Erorile de redactare dau mult de lucru culegătorilor şi corectorilor. Ele apar tipărite, dacă nu se observă de redactori. Pentru ca o lucrare tipărită să iasă bine, trebue să fie scrisă bine, revizuită bine, la nevoie recitită şi chiar prescrisă în parte sau în total. Ori câtă atenţiune am pune în această privinţă nu strică. Ilustrul matematician şi filosof POINCARÉ a spus: „*Niciodată nu am terminat o lucrare fără a regreta modul cum am redijat-o sau planul pe care l-am adoptat*". GAUS spune şi el: „*Ceea ce trebue tipărit, trebue scris mai mult decât o singură dată*". In fine HELMHOLZ ne spune: „*Nu cred să fi dat vreodată bun de imprimat unei scrieri fără ca după 24 de ore cel mai târziu să nu fi găsit deja câteva puncte pe care să le fi putut face mai bine sau mai complet*".

Manuscrisele matematice trebuesc scrise cât se poate de clar; formulele, expresiile algebrice şi ecuaţiile scrise cu cea mai mare îngrijire ca să se distingă bine aranjarea şi simetria lor şi ca să se distingă bine exponenţii, indicii, semnele, etc. S'a şi zis că *formulele nu trebuesc scrise, ci desenate.* Literele de diferite caractere să rezulte clar din sublinieri simple, duble, punctate, ondulate, colorate, etc. Literele din limbi străine trebuesc scrise cu mare

îngrijire şi chiar dat culegătorilor o foaie pe care ele să fie scrise corect şi mai mare. Sunt destule cauze care pot face pe culegători să greşească, să nu le mai procurăm şi noi altele. Scoaterea literelor şi cifrelor greşite se face mai greu la formule decât la scrierea curentă, şi corectarea costă, din cauza timpului pierdut.

*

Să presupunem acum că o chestiune este bine studiată, bine redactată, bine scrisă, astfel că autorului nu i se poate imputa nicio vină şi să vedem ce greşeli poate face culegătorul, adică care sunt erorile pur tipografice. Aceste erori sunt mult mai numeroase şi mult mai variate ca la cărţile de literatură sau de alte ştiinţe şi aceasta din următoarele două cauze. Mai întâiu culegătorii nu cunosc matematicile, nu pricep nimic din ce culeg, nu ştiu ce rost au semnele, exponenţii, indicii, încălecările de litere, etc. Dacă un culegător se ocupă mult de culesul manuscriselor de matematică, ajunge să se obişnuiască cu dificultăţile inerente culesului de formule, expresii, ecuaţii, cu semnele, cu termenii, cu aranjarea estetică a formulelor şi a paginelor; cu aşezarea de figuri, aşa încât numărul erorilor pe care le face scade necontenit. A doua dificultate este de ordin tehnic. Pentru a se culege bine o formulă trebuesc litere, cifre şi semne speciale pe care nu le posedă orice tipografie, şi de aceea se văd azi multe cărţi de matematică tipărite cu formule oribile. Culegerea expresiunilor matematice cere multă dibăcie din partea culegătorului, pe care nu o poate dobândi oricine.

Dificultăţile care se întâlnesc la culesul matematicilor şi numărul mare de corecturi pe care îl cere tipărirea lor în bune condiţiuni, fac ca operele de matematică să fie mult mai scump de tipărit decât al altor fel de cărţi, în aceleaşi condiţiuni de format şi pe acelaşi fel de hârtie. Redactorii de reviste matematice au, cu tipărirea lor, o muncă enormă pe care numai dragostea pentru ştiinţă şi spiritul de desinteresare al oamenilor de ştiinţă le pot învinge. In primul an, la primele numere ale *Gazetei Matematice*, când nu erau fonduri suficiente ca să se dea tipărirea unei Tipografii mari, imprimarea s'a făcut la *Tipografia Populară*, care exista în 1895. Acolo inginerii cari scoteau revista se duceau seara cu schimbul ca să înveţe pe culegătorul MAKE, să-i arate cum să aranjeze formulele cu exponenţii şi indicii; iar când patronul îi făcea observaţie lui MAKE de ce merge aşa de încet cu

culesul revistei, el îi răspundea: „*Ştii Dumneata, Domnule, ce este asta? Asta-i matematică, Domnule!*".

Erorile de tipar la matematici le putem grupa în patru mari grupe: *înlocuiri, suprimări, adăugiri* şi *deplasări.* Le vom examina pe fiecare pe rând.

1. *Inlocuirile* sau *substituirile.* Acestea sunt de foarte multe feluri. Cele mai multe provin din asemănarea pe care o face culegătorul între litere, cifre, semne şi chiar cuvinte din manuscris cu altele care i se par că ar fi cele juste, sau din cauză că ia un semn din o cutiuţă în loc de alta, sau din faptul că literele nu au fost bine distribuite în cutiuţele lor din care se culeg; în fine din cauză că, după culegere, unele cuvinte se desfac, literele cad şi nu se mai repun la adevăratul lor loc, etc. Iată aci exemple de asemenea erori:

a) *Inlocuiri de cuvinte.* Acestea sunt mai rare şi nu au prea mare importanţă căci se văd uşor şi se pot rectifica de către cititori. Iată câteva exemple:

scris:	geometrie	formă	gradaţiuni	convexă	ordinar	public
în loc de:	geometru	formulă	cuadraturi	connexă	arbitrar	primar

scris:	distribuţie	fiolle et cannes	point	numérateur
în loc de:	determinare	bielle et cames	joint	numérotage

b) *Inlocuiri de literă.* Literele care se aseamănă la scrisul cu mâna, cu maşina sau la tipar se confundă foarte des, mai ales în formule, căci în text, din sensul cuvântului, culegătorul poate stabili el însuşi care este interpretarea justă ce trebue dată manuscrisului. Astfel literele mici care se confundă mai des sunt *a* cu *o* şi cu *d*, *e* cu *l*, *j* cu *y*, *x* cu *n*, *r* cu *z*, *h* cu *k*, *g* cu *p*, *p* cu *q*; *u* cu *n*; *e* cu *c*; *g* cu *q*; *a* cu *u*; *u* cu *v*; *s* cu *r*; cele mari E cu F, O cu D, P cu R; B cu R; I cu C; literele mari C, K, O, P, S, U, V, X, Z cu cele mici respective; literele greceşti α, β, γ, ε, ν, η, θ cu a, p, r, e, r, n, o. Ca exemple avem:

scris:	$f'(n)$	$2r+1$	j^3	$F_1(b)$	$an+bn$	$a=d$	$m>p$	J	$(-1)^n$	CB
în loc de:	$f'(x)$	$2z+1$	y^3	$F_1(a)$	$au+bv$	$b=d$	$m>n$	T	$(-1)^p$	AB

Se observă deseori înlocuiri între litere consecutive în alfabet, căci culegătorii greşesc să le ia din cutiuţa care trebue şi le ia de alături sau se face această greşeală la aşezarea literelor în

cutiuțe. Sunt însă și erori grosolane, lipsite de orice explicațiune ca înlocuirea lui A cu L, R cu n, O cu A, etc.

Ca un fapt curios este că în *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, editat de casa *Gauthier Villars & Comp.* am găsit numele editorului scris într'un loc *Ganthier* în loc de *Gauthier!* Atât de departe merg înlocuirile de litere!

c) *Inlocuiri de cifre.* Cifrele 1, 7, 4; apoi 0, 6, 9 și în fine 3, 5, 8 se confundă deseori între ele, atât în numere scrise prin text, cât și în exponenți, indici, coeficienți, etc. Substituiri dese avem între cifrele consecutive pentru aceleași motive ca și cele arătate la literele consecutive. Iată aci exemple de acest fel de înlocuiri:

scris:	$n=0$	12^2	$2n^2$	$p_1=3$	(4)	5	2267	1898
în loc de:	$n=1$	22^2	$3n^2$	$p_1=4$	(5)	6	2277	1899

Se vede că aci lipsește numai un exemplu de confuziune între 7 și 8, de care nu am găsit! Sunt și confuziuni cu cifre mai îndepărtate. Astfel în loc de 736844 s'a tipărit 735844; în loc de 1364 găsim 1064; în loc de 50 găsim 55; 1888 în loc de 1882.

c) *Inlocuiri de litere cu cifre și invers.* Cifrele care se aseamănă cu litere se înlocuiesc uneori între ele ca *o* cu 0; 9 cu *q*; 5 cu *o*; 2 cu *z*; 2 cu *r*; 1 cu *b* sau *l*; *y* cu 1, etc. Iată câteva exemple:

scris:	2^5	0_q	2^3	$x+y$	α^{p-1}	$1/(1-\alpha)$	α^2+1	$y=2-1$	s	θ	$1+(n-1)$
în loc de:	2°	0_9	r^3	$x+1$	2^{p-1}	$1/(b-\alpha)$	2^2+1	$y=z-1$	3	0	$1+(n-m)$

d) *Inlocuiri de semne.* Se găsesc substituiri între semnele aritmetice sau algebrice sau cu semnele de punctuație chiar. Semnele $+$, $-$, $=$ se înlocuiesc des între ele; semnul $\times$ cu $+$ când nu se scriu clar în manuscrise. Se mai confundă $+$ cu $.$; $<$ cu $>$; $\pm$ cu $+$. Iată exemple de asemenea înlocuiri:

scris:	$(x+1)\,x\,(x+1)$	$-q^4$	$-\delta k^4$	$+4x^4$	$\frac{1}{2}(b+1)$	$3u_{n-1}=1$	$2^{11}=11^2$
în loc de:	$(x-1)\,x\,(x+1)$	$+q^4$	$+\delta k^4$	$\pm 4x^4$	$\frac{1}{2}(b-1)$	$3u_{n-1}-1$	$2^{11}-11^2$

scris:	$=27=0$	$q-1$	$\geqslant 16$	m_1	n_1	6) , (7)
în loc de:	$-27=0$	$q=1$	>17	$m,$	$n,$	(1) — (7)

e) *Inlocuiri între litere și semne.* Se confundă des x cu semnul $\times$ ca în exemplul acesta: $b\times z$ în loc de bxz. De asemenea se confundă $\int$ cu f.

f) *Inlocuiri între cifre şi semne.* Acestea sunt mai rare. Astfel culegătorii neştiind ce este ∞, găsesc că este un *opt culcat* şi îl ridică în picioare. De aceea găsim $n = 8$ în loc de $n = \infty$!

g) *Intervertiri.* Aci se găsesc schimbate între ele două litere cifre sau semne. Aşa avem -84 în loc de -48; pe 29 în loc de 92; pe $-(2/1)$ în loc de $-(1/2)$; pe s_2^3 în loc de s_3^2; pe p_1^2 în loc de p_2^1.

2. **Suprimări.** Şi aci deosebim mai multe categorii.

a) *Suprimări de cuvinte.* Aceste erori sunt rare. Aşa găsim *prime* în loc de *prime între ele* când este vorba de numere prime; *exponentul a* în loc de *exponentul lui a*; etc.

b) *Suprimări de litere.* Aceste erori sunt destul de dese şi de variate după cum se vede din exemplele ce dăm aci:

scris:	$2n!$	$=17$	y	2	$f(x)$	p	a_2	$-m^3$	D′ A′
în loc de:	$(2n-p)!$	$x=17$	y^i	2^s	$f^{(n)}(x)$	p^c	a_2^n	$-m^3=n^3$	D'^h A'^h

c) *Suprimări de cifre.* Se găsesc multe cifre lipsă la numere întregi, fracţii zecimale, coeficienţi numerici şi în special unii culegători au mare plăcere să suprime exponenţii şi indicii. Iată aci exemple de asemenea suprimări:

scris:	2	197	43)	$\alpha+1$	πa^2	$z(z+1)$	$i=1, 2, \ldots n$	a
în loc de:	12	1 897	43, 79)	$2\alpha+1$	$\frac{1}{2}\pi a^2$	$4z(z+1)$	$i=i, 2, \ldots \frac{1}{2}n$	$a\sqrt{2}$

scris:	$X^{n+1}=0$	y	L4a	$\overline{72}$	$M8_1$	C_{k_1}	$(4a^2+b^2)$	a	x, y	$2y^2$
în loc de:	$X^{n+1}-1=0$	y^2	$L^2 4a$	$\overline{72}^2$	M8	C_k	$(4a^2+b^2)^2$	a_1	x_1, y_1	$2y_1^2$

scris:	A′	HD	I_b
în loc de:	A_1'	HD_1	I_{2b}

d) *Suprimări de semne.* Şi aici se fac erori multe. Iată exemple de acest fel de erori:

scris:	MN	$\alpha^2\beta^2$	p	$\log S\frac{1}{2}$	$A_n z^n/B_n$	Σm^2+n^2	AC	a	n
în loc de:	M+N	$\alpha^2+\beta^2$	$p!$	$\log S=\frac{1}{2}$	$\Sigma A_n z^n/B_n$	$\Sigma(m^2+n^2)$	AC′	a'	$-n$

scris:	$=1$	$k=n_3+1$	bz	$8^2=1$ mult de 3^2	$\cos\gamma \cos\lambda$
în loc de:	$=\pm 1$	$k=n/3+1$	b/z	$8^2=1+$ mult de 3^2	$\cos\gamma+\cos\lambda$

e) *Suprimări de termeni.* In polinoame sau ecuaţii se suprimă uneori, odată cu semnele, şi literele sau cifrele ce vin legate de acele semne. Aşa găsim $x^4 = 0$, $x^4 = x^2 + x + 1$ în loc de $x^4 - 1 = 0$, $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$.

f) *Suprimări de mărimi matematice din text.* Astfel în loc de *lungimea l, să se găsească* π, *indice n* găsim tipărit *lungimea, să se găsească, indice.*

3. **Adăugiri.** Adăugirile sunt erori mai rare. Ele vin mai mult din amestecul de spații albe cu litere, cifre sau semne. Ele sunt de aceleași feluri ca și suprimările. Adăugirile de cuvinte sunt rare. Iată exemple de adăugiri de diferite categorii:

a) *Adăugiri de litere.* Avem de exemplu $(x^2+y^2)x^2$ în loc de $(x^2+y^2)^2$. Apoi $(x^3 \times x^2+x+1)$ în loc de (x^3+x^2+1).

b) *Adăugiri de cifre.* Iată exemple de asemenea adăugiri:

scris:	196	16	176	$\sqrt{19}$	$\sin^2\alpha^2$	$2n > 2^2$	$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$	π_1	q_1	a_1^n
în loc de:	96	6	76	$\sqrt{9}$	$\sin^2\alpha$	$2n > 2$	$\rho = a^2 \sin 2\theta$	π	q	a^n

scris:	$\sqrt{c_0 - x}$	AD_1	$z=2n$	$u_{n-1}-1+u_{n-2}$	$r/2\,(n+1)$	$r(n-1)/2(n+1)$
în loc de:	$\sqrt{c-x}$	AD	$z=n$	$u_{n-1}+u_{n-2}$	$r/(n+1)$	$(r-1)/2(n+1)$

c) *Adăogiri de semne.* Avem de exemplu o paranteză fără niciun rost la 1 871); un semn + introdus la $2+$ arc tg $(1/443)$; accente de prisos la N′ și p_2'; un semn de integrală introdus inutil în $[\int y dx]\,dx$. Radicalii se prelungesc uneori inutil ca în $\sqrt{k^2+\sin^2 x}\,\sin x\,dx$ unde trebuia numai $\sqrt{k^2+\sin^2 x}\,\sin x\,dx$.

4. **Deplasări.** Aci deosebim următoarele categorii:

a) *Schimbarea reciprocă de litere.* Avem astfel (b/a) în loc de (a/b); pe a_i^j în loc de a_j^i. Unele exemple au fost date la *intervertiri.*

b) *Schimbarea reciprocă de cifre.* Avem astfel 29/203 în loc de 92/203. Alte exemple la intervertiri.

c) *Mutarea de litere pe aceeași linie.* Avem astfel $(ab+cd-ef)$ și $(ab+cd)$ în loc de $(ac+bd-ef)$ și $(ac+bd)$.

d) *Mutarea de cifre pe aceeași linie.* Avem astfel 00496 în loc de 64009.

e) *Mutarea de semne pe aceeași linie.* Avem astfel des deplasări de paranteze ca $(+2^m-1)^2$ în loc de $+(2^m-1)^2$; apoi $([x-]x])$ în loc de $(x-[x])$; pe $\sqrt{[2r+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}$ în loc de $[\sqrt{2r+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}]$. Iată o deplasare a semnului $=$ în $x=-3$ în loc de $=x-3$. Ca deplasare afară din radical găsim $-\sqrt{p}$ în loc $\sqrt{-p}$.

f) *Inălţarea indicilor.* Aşa avem pe *mp* pentru m_p; pe *nyx* în loc de n_{xy}; pe r^n în loc de r_n; pe X^2 în loc de X_2; pe a_2^2 în loc de a_{22}..

g) *Scoborârea la indice.* Aşa găsim 7_p în loc de $7p$; apoi m_p în loc de *mp.*

h) *Descinderea exponenţilor.* Astfel exponenţii cad pe linie ca în $r_2\,2n\,(2q+1)$ în loc de $r_2^{2n\,(2q+1)}$; $[n/(n+1)]\,(n+1)$ în loc de $[n\,(n+1)]^{n+1}$. Uneori căderea este mai mare, exponentul devenind indice ca în K_2 în loc de K^2. Uneori avem cădere de semne ca în $2^{-0,01}$... în loc de $2^{-}0,01$... Tot aşa $(1-x^{2n})$ în loc de $(1-x^{2^n})$.

Acestea sunt de regulă erorile care se întâlnesc în cărţile de matematică. Cunoscând genul lor ne putem mai uşor feri de ele, sau a le observa la corecturi şi chiar la scrierea manuscriselor ca să nu dăm loc la apariţiunea lor cu uşurinţă.

ION IONESCU.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU"

Regulamentul prevede ca premiul să fie acordat pentru o lucrare de trigonometrie publicată în *„Gazeta Matematică"* al cărei autor, român, trebue să fie elev de liceu, de şcoală militară, de şcoală politehnică sau student la o facultate din Ţară.

Cercetând vol. XLIX (1943—1944) am găsit că s'au ocupat de chestiuni de trigonometrie următorii corespondenţi:

— D-l ADRIAN I. POPESCU (student şcoala politehnică Timişoara). D-sa este autorul notei 52 dela pag. 728 şi a problemei propuse 5885 dela pag. 266. In nota 52 D-l ADRIAN POPESCU revine asupra unui interesant articol publicat în vol. XLVIII, punând sub altă formă formulele finale.

D-sa apare printre rezolvitorii cu soluţii complete a problemelor 5659, 5760, 5637.

— D-l MARCEL D. COTARIU este autorul problemei propuse 5916 (relaţie între elementele unui triunghiu) care nu e de trigonometrie pură şi a exerciţiilor 21, 31, 43, 44 de trigonometrie.

Apare ca rezolvitor al problemelor 5659, 5760, 5831, 5637.

Alţi corespondenţi au avut o activitate mai slabă.

Deoarece pe anul 1942—1943 nu s'a decernat premiul, s'ar putea acorda întreaga sumă de 10.000 lei D-lui ADRIAN I. POPESCU, sau s'ar putea împărţi câte 5000 lei D-lor ADRIAN POPESCU şi MARCEL COTARIU.

Suntem de părere să se ia în considerare prima posibilitate, aşteptând dela D-l COTARIU o activitate mai bogată în viitor.

COMISIUNEA PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „VASILE CRISTESCU"

ALEX. V. NICULESCU, GH. D. SIMIONESCU, P. SERGESCU.

Acest raport s'a aprobat în Adunarea generală dela 19.II.1945. Se va da D-lui ADRIAN POPESCU premiul în valoare de 10.000 (zece mii) lei.

NOTE MATEMATICE

27. *Un filosof român din sec. XVII:* G. IVUL. Sub titlul acesta, D-l prof. IOSIF E. NAGHIU publică un articol în *„Gazeta Cărţilor"* N-rele 17—18 — Anul XII — din 15 şi 31 Mai 1943.

Este vorba despre G. IVUL, o figură aproape uitată, filosof român, fost călugăr iezuit şi profesor, la Caşovia şi Viena.

S'a născut la 25 Martie 1619 la Caransebeş. La 21 Octomvrie 1637 e primit în ordinul Iezuit. Face studii serioase şi în curând ajunge profesor. A propus Gramatica, Filosofia, *Matematicile* şi Teologia la colegiile Iezuite din Caşovia şi Viena. A murit la Caşovia la 8 Aprilie 1678.

La sfârşitul articolului sunt date titlurile a şapte lucrări de Istorie, Filosofie şi Logică, scrise în latineşte. Aceste lucrări nu le găsim în nicio bibliotecă din ţară.

P. P. DRĂGHICESCU.

28. *Numere interesante cu 10 cifre diferite*[1]). Pentru N_9 începând cu 8 am găsit următoarele 98 soluţii:

N_9	N	N_9	N
801 743 256	7 215 689 304	834 670 521	7 512 034 689
803 452 176	7 231 069 584	834 671 052	7 512 039 468
804 351 672	7 239 165 048	835 204 671	7 516 842 039
804 563 217	7 241 068 953	835 210 467	7 516 894 203
805 367 241	7 248 305 169	835 214 760	7 516 932 840
805 462 317	7 249 100 853	835 216 470	7 516 948 230
805 734 261	7 251 608 349	835 402 671	7 518 624 039
806 451 327	7 258 061 943	835 410 267	7 518 692 403
807 231 546	7 265 083 914	835 672 041	7 521 048 369
807 321 456	7 265 893 104	835 672 104	7 521 048 936
810 426 735	7 293 840 615	835 742 601	7 521 683 409
810 536 724	7 294 830 516	835 742 610	7 521 683 490
810 573 426	7 295 160 834	836 571 204	7 529 140 836
812 057 436	7 308 516 924	837 560 214	7 538 041 926
812 743 650	7 314 692 850	837 560 241	7 538 042 169
813 245 076	7 319 205 684	837 561 024	7 538 049 216
813 406 572	7 320 659 148	840 213 756	7 561 923 804
814 350 672	7 329 156 048	840 231 657	7 562 084 913
815 743 620	7 341 692 580	840 237 561	7 562 138 049
817 435 602	7 356 920 418	840 321 567	7 562 894 103
817 560 324	7 358 042 916	840 356 721	7 563 210 489
820 657 134	7 385 914 206	840 365 712	7 563 291 408
820 671 435	7 386 042 915	841 023 756	7 569 213 804
821 046 735	7 389 420 615	841 035 672	7 569 321 048
821 340 576	7 392 065 184	842 356 071	7 581 204 639
821 647 350	7 394 826 150	842 356 107	7 581 204 963
823 140 657	7 408 265 913	842 573 601	7 583 162 409
823 615 071	7 412 805 639	842 573 610	7 583 162 490
826 473 501	7 438 261 509	845 021 376	7 605 192 384
826 473 510	7 438 261 510	845 023 761	7 605 213 849
826 573 140	7 439 158 260	845 102 376	7 605 921 384
832 140 567	7 489 265 103	845 360 217	7 608 241 953
832 540 167	7 492 861 503	845 603 217	7 610 428 953
832 576 140	7 493 185 260	846 720 351	7 620 483 159
834 025 761	7 506 231 849	846 721 035	7 620 489 315
834 102 576	7 506 923 184	847 132 650	7 624 193 850

1) Urmare la Nota dela pag. 285, Vol. L.

N_9	N	N_9	N
850 143 267	7 651 289 403	867 214 035	7 804 926 315
850 143 672	7 651 293 048	867 240 351	7 805 163 249
850 346 721	7 653 120 489	870 163 245	7 831 469 205
851 034 672	7 659 312 048	871 463 250	7 843 169 250
853 472 601	7 681 253 409	872 356 041	7 851 204 369
853 472 610	7 681 253 490	872 356 104	7 851 204 936
853 724 601	7 683 521 409	872 403 561	7 851 632 049
853 724 610	7 683 521 490	872 410 356	7 851 693 204
854 602 317	7 691 420 853	873 251 460	7 859 263 140
854 613 720	7 691 523 480	873 256 014	7 859 304 126
854 731 260	7 692 581 340	873 450 261	7 861 052 349
867 150 324	7 804 352 916	873 451 026	7 861 095 234
867 213 504	7 804 921 536	873 602 145	7 862 419 305

Cu acest tablou se termină seria notelor începute la pag. 247, Vol. XLII şi care au căutat să dea soluţiile următoarei probleme:

Utilizând câte o singură dată pe cele 10 cifre ale sistemului zecimal să se formeze un număr N, *care să fie egal cu produsul dintre o cifră* p *şi un număr* N_p *format din celelalte 9 cifre.*

In notele publicate am găsit 3888 soluţii. Este probabil să mai fi scăpat unele soluţii sau să se fi strecurat vreo eroare de tipar la soluţiile publicate. Problema este o extindere a problemei 2875, propusă de D-l V. THÉBAULT la pag. 462, Vol. XLVIII *Mathesis*.

Problema extinsă de noi în aceste note a suscitat interesul D-lui I. B. FLORESCU, care ne-a trimis asupra ei un articol ce se va publica îndată ce spaţiul ne va permite.

G-L G. BUICLIU.

29. *Patru proprietăţi ale cubului.* 1°. Fie Q mijlocul diagonalei $A_1 B_3$ a unui cub şi P simetricul lui Q faţă de B_3. Alipim cubului iniţial încă trei cuburi egale, ca în figură. Dacă se notează cu a latura cubului se vede pe figură că

$$A_1 B_3 = a\sqrt{3} \quad \therefore \quad A_1 P = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \quad \text{şi} \quad A_1 B_6 = a\sqrt{6}. \qquad (1)$$

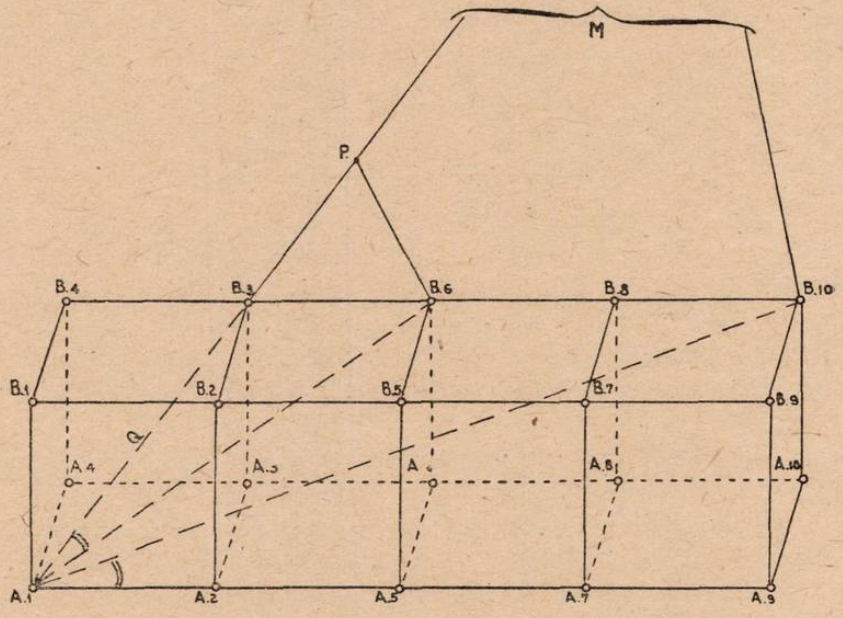
Apoi paralelogramul $Q A_2 B_6 P$ dă

$$B_6 P = A_2 Q = \frac{a\sqrt{3}}{2} . \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) se vede că

$$\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{6})^2 \quad \therefore \quad \overline{A_1 P}^2 = \overline{A_1 B_6}^2 + \overline{B_6 P}^2$$

ceea ce arată că *triunghiul* $A_1 B_6 P$ *este dreptunghic în* B_6.



2°. Din triunghiul dreptunghic $A_1 B_6 P$ se scoate

$$\sin P A_1 B_6 = \frac{P B_6}{A_1 P} = \frac{1}{3} \quad \text{sau} \quad \text{tg.}\, B_3 A_1 B_6 = \frac{P B_6}{A_1 B_6} = \frac{1}{2\sqrt{2}} .$$

3°. Lipim 4 cuburi egale, unul lângă altul ca în figură şi observăm că triunghiul dreptunghic $B_{10} A_9 A_1$ dă relaţia

$$\text{tg}\, B_{10} A_1 A_9 = \frac{A_9 A_{10}}{4a} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

care comparată cu 2° arată că *unghiurile* $B_3 A_1 B_6$ *şi* $B_{10} A_1 A_9$ *sunt egale.*

4°. Perpendiculara în B_{10} pe A_1B_{10} taie pe A_1B_3 în M. Unghiurile $A_1B_{10}B_3$, $B_{10}A_1A_9$ sunt egale ca alterne interne. Apoi din triunghiul $A_1B_3B_{10}$ în care se ţine seama de valorile laturilor în funcţie de a se scoate

$$\sin B_3A_1B_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos B_3A_1A_{10} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ şi } \operatorname{tg} B_3A_1B_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cu acestea triunghiul dreptunghic $MB_{10}A_1$ dă

$$MB_{10} = A_1B_{10}\operatorname{tg} B_3A_1B_{10} = 3a \text{ şi } MA_1 = \frac{MB_{10}}{\sin B_3A_1B_{10}} = 3a\sqrt{3}.$$

Aceste relaţiuni arată că MB_{10} *şi* A_1M *sunt respectiv triplul laturei şi diagonalei mari a cubului şi că triunghiul* $MB_{10}B_3$ *este isoscel.*

Observaţiuni: 1. Proprietatea 3° este extinderea în spaţiu a unei proprietăţi a patratului, tratată de D-l Prof. N. ABRAMESCU în *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XXII, pag. 118.

2. Proprietăţile 1° şi 4° dau imediat construcţia unui cub când i se cunoaşte o diagonală, adică construcţia plană cerută de următoarea problemă din Cap. XVI, *Culegere de probleme de geometrie* de G. ŢIŢEICA: *Se dă diagonala unui cub; să se găsească prin o construcţie plană, latura cubului.*

N. GAIU.

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL „GAZETA MATEMATICĂ"

Problemele dela proba scrisă din ziua de 10 Mai 1945

(Timpul acordat: 3 ore pentru fiecare materie)

(Urmare dela pag. 353)

CLASA VII-a

Algebra. 1°. Să se arate că funcţiunea

$$y = \operatorname{arctg} x$$

verifică ecuaţia

$$y^{(IV)}y' - 2y'''y'' + 8y''y'^3 = 0. \qquad (1)$$

2°. Să se arate că şi funcţiunea

$$y = \text{arctg}\,(ax + b)$$

verifică ecuaţia (1), a şi b fiind constante.

3°. Să se generalizeze, arătându-se că fiind dată o funcţiune

$$y = f(x),$$

care verifică ecuaţia

$$\Sigma A_m\, y^{(m_1)}\, y^{(m_2)} \ldots y^{(m_n)} = 0 \qquad (2)$$

unde $m_1, m_2, \ldots m_n$ sunt întregi pozitivi verificând relaţia

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = n,$$

A_m constantă, iar $y^{(m_i)}$ derivata de ordinul m_i a funcţiunii y, funcţiunea

$$y = f\,(ax + b)$$

verifică ecuaţia (2).

4°. Se consideră progresia aritmetică cu termeni pozitivi şi crescători

$$\div a_0 \,.\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, \ldots \,.\, a_n \,.$$

Să se arate că funcţiunile de forma

$$y_i = \text{arctg}\;(x - a_i) - \text{arc tg}\;(x - a_{n-i})$$

au maximele colineare.

Dacă M_i este maximul funcţiunii y_i, iar $n = 2p - 1$, să se calculeze

$$\sum_{i=0}^{p-1} \text{tg}\,\frac{M_i}{2}\,.$$

5. Dacă $\qquad a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

să se arate că funcţiunea $\quad y = \sum_{i=1}^{n} (\text{arctg}\; x - a_i)$

îşi schimbă concavitatea, când x variază dela a_1 la a_n de un număr impar de ori.

(Toate chestiunile obligatorii).

Geometria discriptivă. Epura se va executa pe pagina a 3-a a foii de hârtie de dimensiunile 207×293 milimetri. Linia pământului paralelă cu marginile mici ale hârtiei şi la mijloc.

Se dau trei puncte:

A (142, 106, 45) ; B (70, 35, 30) ; C (100, 10, 75)

şi se cere:

1. Fără a construi urmele planului P (ABC), să se găsească linia de intersecţie a acestui plan cu planul Q, dus perpendicular pe mijlocul distanţei dela A la V pe orizontala planului P dusă prin A; V fiind urma verticală a acestei orizontale.

2. Să se construiască urmele celor două plane P şi Q şi să se verifice acest lucru.

3. Să se găsească proiecţiunile punctului de întâlnire al medianelor triunghiului ABC.

4. Printr'o rotaţie (rabatere) a planului Q, să se găsească adevărata mărime a diedrului făcut de planul P cu planul orizontal de proiecţiune.

Un punct oarecare $M(x, y, z)$ este dat prin trei coordonate, dintre care x este distanţa liniei de ordine a punctului faţă de marginea din stânga a paginei, y este depărtarea, iar z cota. Coordonatele sunt date în milimetri.

Pe pagina a doua a colii, se va scrie o legendă, arătând metodele urmate şi construcţiile executate, cât mai pe scurt posibil.

CLASA VIII-a

Algebra. 1°. Fie $P_i(x)$, $i=1, 2, \ldots n+1$, polinoame de gradul n; a_1, $a_2, \ldots a_n$, n cantităţi distincte reale.

Să se arate că polinoamele

$$F_1(x) = \begin{vmatrix} P_1'(x) & P_1(a_1) & P_1(a_2) & \ldots & P_1(a_n) \\ P_2'(x) & P_2(a_1) & P_2(a_2) & \ldots & P_2(a_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n+1}'(x) & P_{n+1}(a_1) & P_{n+1}(a_2) & \ldots & P_{n+1}(a_n) \end{vmatrix},$$

$$F_2(x) = \begin{vmatrix} P_1''(x) & P_1(a_1) & P_1(a_2) & \ldots & P_1(a_n) \\ P_2''(x) & P_2(a_1) & P_2(a_2) & \ldots & P_2(a_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n+1}''(x) & P_{n+1}(x_1) & P_{n+1}(a_2) & \ldots & P_{n+1}(a_n) \end{vmatrix}$$

nu pot avea rădăcini comune.

2°. Dacă $P_i(x)$ sunt polinome cel mult de gradul $m < n$, $F_1(x)$ şi $F_2(x)$ sunt identic nule.

3°. Dacă $P_i(x)$ sunt polinoame de grad n având cel puţin o rădăcină comună, polinoamele $F_1(x)$ şi $F_2(x)$ sunt de asemenea identic nule.

4°. Dacă $P_i(x)$ sunt polinoame de gradul $n+m$ şi au o rădăcină comună, multiplă de ordinul m, $(m > 3)$, polinoamele $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_2'(x)$ au suma rădăcinilor simple în progresie aritmetică.

5°. Păstrând notaţiile dela punctul 1° şi luând $n=3$, să se cerceteze cum sunt aşezate numerele

$$\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_3}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}$$

în raport cu intervalul dintre rădăcinile polinomului $F_1(x)$ respectiv.

(Toate chestiunile obligatorii).

Geometria analitică. Axele Ox, Oy fiind presupuse rectangulare, se consideră dreapta D:

$$(D) \qquad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

şi cercul C:

$$(C) \qquad x^2+y^2-2a(x+y)+a^2=0.$$

Să se arate că:

1°. Relaţiunea:

(E) $$pq - 2a(p+q) + 2a^2 = 0$$

exprimă condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca dreapta D să fie tangentă cercului C.

2°. Aceiaşi relaţiune exprimă de asemeni, condiţiunea necesară şi suficientă ca cercul γ circumscris triunghiului determinat de axele Ox, Oy şi dreapta D să fie tangent următorului cerc, C_1:

(C_1) $$x^2 + y^2 - 4a(x+y) + 4a^2 = 0.$$

3°. Dacă dreapta D variază astfel ca parametrii p şi q să verifice relaţiunea (E), locul geometric al centrului γ este o hiperbolă echilateră H cu centrul în centrul cercului C.

4°. Care sunt focarele şi asimptotele hiperbolei H?

5°. M fiind centrul cercului γ, simetricul originei O, în raport cu tangenta în M, la hiperbola H coincide cu punctul de contact al cercurilor C_1 şi γ.

Notă. *Soluţiunile însoţite de observaţiuni geometrice, vor fi mai bine apreciate.*

Mecanica. *Problema I.* Fie o placă circulară de centru O şi rază R având o gaură circulară de rază $\frac{R}{4}$, iar centrul în O_1 $\left(OO_1 = \frac{R}{4}\right)$. Se cere mărimea unei alte găuri circulare ce ar trebui făcută în placă, cu centrul în O_2, razei $\left(OO_2 = \frac{R}{2}\right)$ astfel încât centrul de greutate al plăcii cu 2 găuri să fie în O.

Problema II. Fie 3 chibrite identice AB, CD, EF de greutate G şi lungime 1, aşezate, primele 2 paralele între ele cu capetele pe 4 reazeme A, B, C, D situate într'un plan orizontal, iar cel de al 3-lea rezumându-se pe primele 2 şi anume: capătul E pe AB la distanţa $\frac{l}{2}$ de A, iar capătul F pe CD la distanţa $\frac{l}{4}$ de C.

La o distanţă $\frac{l}{4}$ de F pe chibritul EF mai este aşezată şi o greutate $P = \frac{G}{2}$. Să se determine reacţiunile celor 4 reazeme A, B, C, D.

Problema III. Dela o înălţime $h = 20$ m se asvârle un proiectil fără iuţeală iniţială în jos pe verticală. După $T = 2$ sec. dela asvârlirea lui, se aruncă pe aceeaşi verticală un al doilea proiectil astfel încât îl ajunge pe primul exact în momentul în care acesta atinge solul.

Să se determine iuţeala iniţială v_0 cu care trebue lansat al doilea proiectil şi iuţelile pe care le au ambele proiectile la sol.

Pentru calcul se poate lua $g = 10$ m/sec^2.

BIBLIOGRAFIE

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXX. Nr. 4. Oct.-Dec. 1944. ŞT. PROCOPIU: Problema virusurilor şi originea vieţii pe pământ. C. I. COZLOVSCHI: Mărirea aparentă a astrelor la orizont. N. BOTNARIUC: Ideile profesorului RENÉ JEANNEL despre geneza faunelor terestre. P. JITARIU: Date noui asupra mecanismului contracţiei musculare. C. V. GHEORGHIU: Consideraţiuni asupra coloarei ca senzaţie vizuală şi fenomen fizic. I. GIUGIUMAN: Regimul hidrografic al Mureşului. M. RĂVĂRUŢ: Pădurile judeţului Alba.

Scurte comunicări originale. Note şi informaţiuni.

România Aeriană. Anul XIX. Nr. 2—3. Februarie-Martie 1945. *România Aeriană:* Organizarea infrastructurii. C-dor av. A. POPOVICI: Generalul aviator C. ARGEŞANU. M. NEGRU: Aviaţa şi războiul în curs. N. ŢIPEI: Laboratorul aerodinamic al Politechnicei din Bucureşti. GH. GH. MIRONESCU: Contribuţia avionului la rezolvarea crizei transporturilor de după război. VALENTIN POPESCU: Un planorist „tare". Dr. Ing. I. ŢINTEA: Bucureşti-Newyork în 24 ore. Ing. GH. RADO: Evoluţia recentă a grupului moto-propulsor. AL. VLĂDICESCU: Aviaţa franceză în lupta pentru cucerirea Atlanticului de Nord. GH. I. VASILESCU: Evoluţia şi structura traficului aerian în România.

Ştiinţă şi Progres. Anul X. Nr. 1—2. Noemvrie-Decemvrie 1944. C. IACOB: LAZARE CARNOT. C. COŞNIŢĂ: Asupra triunghiului antipodar. C. IONESCU-BUJOR: Omografie potenţială. G. JANET: Mânăstiri din nordul Moldovei. Probleme rezolvate şi propuse.

Idem. Nr. 3—5. Ianuarie-Martie. 1945. C. IACOB: LAZARE CARNOT. I. V. MĂTIEŞ: Rezolvarea unor congruenţe. FILOFTEIA BRĂTILĂ: Desvoltarea matematicei la Români. Probleme rezolvate şi propuse.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 323. Vol. XLIX, pag. 87. Se cer motivele pentru care în unele tabele numerice se întâlneşte cifra *trei* când sub forma 3 când sub forma ȝ. In tipografiile mai mari există mai multe serii complete de caractere de litere, semne matematice, etc. Ele au forme uşor diferenţiate între ele după fabrica în care au fost turnate, după anul comandei, după modelul cerut (caractere Garmont, Cicero, etc.). De obiceiu, când se tipăreşte o carte, se decide dela început ce caractere tipografice vor fi întrebuinţate.

Se întâmplă uneori ca în culegerea unui text să trebuiască *mai multe* exemplare dintr'un semn decât numărul corespunzător de semne cu caracterul ales. Aceasta e mai ales posibil în cazul tipăririi de tabele numerice, căci stocul de cifre de care dispune tipografia, dintr'un acelaşi caracter, este relativ limitat. Şi atunci, cum coala trebue totuşi imprimată, sunt două alternative: 1) sau se comandă un număr de exemplare *noi* din caracterul respectiv; 2) sau se completează textul tipărit cu exemplare din altă serie,

adică cu *alt* caracter. Prima alternativă cere timp mult pentru turnarea semnelor şi este şi foarte costisitoare, căci încarcă tipografia cu o mare cantitate de semne care nu se folosesc decât rareori în cantitate excesivă necesitate de tabele. De aceea se recurge cel mai adesea la alternativa a doua şi se compune textul cu două feluri de caractere, acolo unde semnele dintr'un singur caracter nu sunt suficiente. Aşa am procedat adesea şi eu la Cluj, în tipografia Ardealul cu tipărirea revistei *Matematica*, unde se întâlnesc uneori în acelaşi articol două desemnuri („flori") diferite pentru x sau pentru y. Dar de obiceiu, se întrebuinţează al doilea semn *în continuare, când primul a fost epuizat.* Dacă totuşi semnele sunt uneori amestecate, *„chiar în acelaşi număr"*, asta se datoreşte faptului că unele cifre au fost înlocuite la *„corectură"*, după ce textul a fost compus. Pe de altă parte, se întâmplă că între timp, s'a tras la maşină vreo coală deja compusă, aşa că mai vin disponibile caracterele din acea coală (după ce s'a desfăcut *„zaţul"*), care se intercalează în culegerea coalei următoare.

P. S.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

Dr. A. Kleyer. Lehrbuch der Logarithmen. Stuttgart 1884.

Dr. A. Kleyer. Lehrbuch der Zinsenszins und Rentenrechnung. Stuttgart 1885.

Donate de I. Ionescu, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2865. *Fie* I_n *numărul format din* n *cifre egale cu* I *şi* A *una din cifrele cu care se termină un patrat perfect. Dacă* I_{2n-1} A *este numărul ce se obţine scriind pe* A *la dreapta lui* I_{2n-1}, *să se determine* n *astfel ca* I_{2n-1} A *să fie patrat perfect.*

G-l Gh. Buicliu.

Este evident că dacă $I = 0$ avem soluţiile de formă

$(0\ldots01)^2 = 0\ldots01$; $(0\ldots02)^2 = 00\ldots04$ şi $(0\ldots03)^2 = 00\ldots09$.

Vom considera în cele ce urmează $I \neq 0$ şi $A \neq 0$, căci dacă $A = 0$ atunci şi $I = 0$.

Reţinând deci din ultimele grupe de 2 cifre ale unui patrat numai pe acelea în care $I \neq 0$, găsim că numerele $I_{2n-1}A$ de examinat sunt următoarele:

$11\ldots1_{2n-1}6$; $22\ldots2_{2n-1}1$; $22\ldots2_{2n-1}4$; $22\ldots2_{2n-1}5$; $22\ldots2_{2n-1}9$;

$33\ldots3_{2n-1}6$; $44\ldots4_{2n-1}1$; $44\ldots4_{2n-1}4$; $44\ldots4_{2n-1}9$; $55\ldots5_{2n-1}6$;

$66\ldots6_{2n-1}1$; $66\ldots6_{2n-1}4$; $66\ldots6_{2n-1}9$; $77\ldots7_{2n-1}6$; $88\ldots8_{2n-1}1$;

$88\ldots8_{2n-1}4$; $88\ldots8_{2n-1}9$ şi $99\ldots9_{2n-1}6$.

1°. Considerăm numerele $11\ldots1_{2n-1}6$. Observăm că

$$16 = 4^2 \quad ; \quad 1116 = 4 \times 279 \quad ; \quad 111116 = 4 \times 27779;$$

$$11\ldots1_{2n-1}6 = 4 \times 277\ldots7_{2n-1}9.$$

Plecând dela 1116 se vede că factorul care înmulţeşte pe 4 se termină în 79 şi deci nu este patrat perfect. In cazul 1° nu avem decât soluţia 16.

2°. Avem

$$22\ldots2_{2n-1}1 = 8 \times 277\ldots7_{2n-2} + 5.$$

Cum numerele de forma *mult.* $8 + 5$ nu pot fi patrate perfecte, nu avem soluţii în acest caz.

3°. Avem

$$2\ldots2_{2n-1}4 = 4 \times 55\ldots5_{2n-2}6 = 2^2 \times 55\ldots5_{2n-2}6.$$

Am demonstrat în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 224, că $5_{2n-2}6$ nu poate fi patrat perfect. Deci în cazul 3° nu avem nicio soluţie.

4°. Avem

$$22\ldots2_{2n-1}5 = 25 \times 88\ldots8_{2n-3}9.$$

Dar $88\ldots8_{2n-1}9$ nu este patrat perfect pentru nicio valoare a lui n, după cum se va vedea la cazul 17°.

5°. $22\ldots2_{2n-1}9 = 8m + 5$ nu este patrat perfect după cum s'a arătat la 2°.

6°. Avem

$$36 = 6^2 \quad ; \quad 3336 = 6 \times 556 \quad ; \quad 333336 = 6 \times 55556.$$

S'a arătat la 3° că $55\ldots5_{2p}6$ nu este patrat. Deci singura soluţie este $36 = 6^2$.

7°. Notând

$$N = 11\ldots 1_n$$

avem

$$44\ldots 4_{2n-1}\,1 = 44\ldots 4_{2n} - 3 = 4 \times N \times 10^n + 4N - 3.$$

Dar

$$10^n = 99\ldots 9_n + 1 = 9N + 1$$

$$\therefore \quad 44\ldots 4_{2n-1}\,1 = 4 \times N\,(9 \times N + 1) + 4N - 3.$$

Problema revine la a rezolva în numere întregi ecuația

$$36N^2 + 8N - 3 = x^2.$$

Și fiindcă N este pozitiv, luăm

$$N = \frac{-4 + \sqrt{124 + 36x^2}}{36} = \frac{-2 + \sqrt{31 + 9x^2}}{18}.$$

Pentru ca N să fie real trebue ca

$$9x^2 + 31 = y^2 \quad \therefore \quad (y - 3x)\,(y + 3x) = 31$$

$$\therefore \quad \begin{matrix} y - 3x = 1 \\ y + 3x = 31 \end{matrix} \quad \text{și} \quad \begin{matrix} y - 3x = 31 \\ y + 3x = 1. \end{matrix}$$

Primul sistem dă $x = 5$, $y = 16$ iar al doilea $x = -5$, $y = 16$. Ducând aceste valori în N găsim

$$N = \frac{-2 + \sqrt{256}}{18} = \frac{-2 + 16}{18}$$

inadmisibil, nefiind întreg.

8°. Numărul $44\ldots 4_{2n-1}\,4$ nu dă nicio soluție căci

$$44\ldots 4_{2n} = 4 \times 11\ldots 1_{2n}$$

și ultimul factor $11\ldots 1_{2n}$ nu este patrat perfect.

9°. Procedând ca la 7° avem

$$44\ldots 4_{2n-1}\,9 = 4N\,(9N + 1) + 4N + 5.$$

Ecuația

$$36N^2 + 8N + 5 - x^2 = 0$$

dă $$N = \frac{-4 + \sqrt{36x^2 - 164}}{36} = \frac{-2 + \sqrt{9x^2 - 41}}{18}.$$

Din condiția

$$9x^2 - 41 = y^2$$

scoatem

$$(3x - y)(3x + y) = 41$$

care dă soluția admisibilă

$$x = 21 \quad , \quad y = 20$$

cu care se obține N = 1 și deci soluția $49 = 7^2$.

10°. Am demonstrat în *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, pag. 217, că $55\ldots5_{2n-1}6$ nu poate fi patrat perfect.

11°. Numărul $66\ldots6_{2n-1}1$ nu poate fi patrat perfect căci față de divizorul 8 este de forma $8m + 5$.

12°. Avem în general

$$66\ldots6_n4 = 8 \times 833\ldots3_{n-1} \neq k^2$$

și în particular pentru $n = 1$

$$64 = 8 \times 8 = 8^2$$

soluție unică.

13°. Ca la 11°, numărul $66\ldots6_{2n-1}9$ fiind de formă $8m + 5$.

14°. Observăm că

$$76 \neq k^2 \quad ; \quad 7776 = 16 \times 486 \neq k^2$$

căci 486 nu este patrat perfect. Apoi

$$77\ldots7776 = 77\ldots7 \times 10^4 + 7776 = 16\,[77\ldots7 \times 1025 + 486].$$

Se vede că paranteza se termină cu 11 și deci nu poate fi patrat perfect.

15°. Numărul $88\ldots8_n1$ nu este patrat perfect decât pentru $n = 1$, după cum se va vedea la soluția ce vom da problemei 5996, propusă la pag. 762, Vol. XLIX, *Gazeta Matematică*, cu următorul enunț:

Să se demonstreze că numărul $88\ldots8_n1$ *nu este patrat perfect decât pentru* $n = 1$.

16°. Avem

$$88\ldots8_{2n-1}4 = 4 \times 22\ldots2_{2n-1}1$$

care nu este patrat perfect, după cum am văzut la 2°.

17°. Pentru $88\ldots8_{2n-1}9$ avem

$$88\ldots8_{2n-1}9 = 8_n \times 10^n + 8_n + 1 = 72N^2 + 16N - 1 = k^2$$

unde $N = 11\ldots1_n$. Din ecuaţia precedentă scoatem

$$N = \frac{-4 + \sqrt{18k^2 - 2}}{36} = \frac{-4 + \sqrt{2(3k^2 - 1)}}{36}.$$

Pentru ca N să fie raţional trebue ca

$$3k^2 - 1 = 2y^2 \qquad (1)$$

y fiind un număr întreg. Problema revine la a rezolva în numere întregi ecuaţia

$$x^2 - 2y^2 = 1 \qquad (2)$$

în care $x = 3m$. Dar soluţiile întregi pozitive ale ecuaţiei

$$x^2 - Dy^2 = 1 \qquad (3)$$

sunt cunoscute şi sunt date în diferite tratate de teoria numerelor. Astfel în *Analyse indéterminée* par R. D. CARMICHAEL se dă la pag. 31 următoarele formule ale soluţiilor întregi pozitive ale ecuaţiei (3):

$$x_n = \frac{1}{\alpha^{n-1}}\left[x_1^n + C_2^n D x_1^{n-2} y_1^2 + C_n^4 D^2 x_1^{n-4} y_1^4 + \ldots\right]$$

$$y_n = \frac{1}{\alpha^{n-1}}\left[C_n^1 x_1^{n-1} y_1 + C_n^3 D x_1^{n-3} y_1^3 + \ldots\right].$$

In aceste formule α este un întreg pozitiv aşa încât

$$D \equiv 0 \pmod{\alpha^2} \quad \text{şi} \quad 4D \equiv \alpha^2 \pmod{4\alpha^2},$$

iar x_1 şi y_1 sunt soluţiile cele mai mici ale ecuaţiei (3) înafară de (1, 0). Aplicând aceste formule la ecuaţia (2) în care $D = 2$ şi $\alpha = 1$ găsim

$$x_1 = 3 \quad , \quad y_1 = 2$$

şi deci soluţiile întregi pozitive ale ecuaţiei (1) sunt

$$x_n = 3^n + C_n^2 2 . 3^{n-2} . 2^2 + C_n^4 2^2 . 3^{n-4} . 2^4 + \ldots$$

$$y_n = C_n^1 3^{n-1} . 2 + C_n^3 2 . 3^{n-3} . 2^3 + \ldots$$

După ecuația (1) avem

$$3k^2 - 1 = 2 . y_n^2$$

și deci ducând în formula lui N, avem

$$N = \frac{-4 + \sqrt{2.2.y_n^2}}{36} = \frac{-2 + y_n}{18} = \frac{-1 + 3^{n-1} + C_n^3 . 3^{n-3} . 2^3 + \ldots}{9}$$

egalitate imposibilă în numere întregi pentrucă numărătorul nu se divide prin 9 pentru nici o valoare a lui n. Deci $88\ldots8_{2n-1}9$ nu este nicio dată patrat perfect.

18°. Numărul $99\ldots9_{2n-1}6$ nu poate fi patrat perfect căci se divide prin 3 fără a se divide prin 9.

In concluzie numărul $I_{2n-1}A$, definit în enunț, nu este patrat decât pentru $n = 1$.

NOTĂ. a) Se vede din soluția precedentă că problema nu prezintă nicio dificultate și că i se poate aplica mai multe metode de rezolvare, după valorile lui I și A. Am lăsat cazul $88\ldots8_{2n-1}1$, pentru problema 5996 căreia îi aplic o metodă diferită de a celorlalte cazuri, spre a mai pune la încercare o nouă serie de corespondenți.

b) D-l Prof. GH. CONSTANTINESCU ne-a trimis o soluție parțială. D-sa rezolvă cazurile 2°, 3°, 5°, 7°, 11°, 12°, 13° și 18° ca în soluția dată în acest număr.

Pentru cazul 1° se folosește de forma patratelor față de divizorul 16.

La cazul 6° observă că $33\ldots3_{2n-1}6$ este *mult.* 8 dar nu e *mult.* 16.

Pentru cazurile 4°, 8°, 9°, 10°, 14°, 15°, 16° și 17° nu dă soluții acceptabile.

c) D-l GH. GH. CONSTANTINESCU, când era student, a dat o soluție bună aducând cazurile 7°, 9°, 16 și 17° la o problemă de algebră pe care a rezolvat-o după metoda din nota D-sale 40, pag. 252 *Gazeta Matematică*, Vol. XXXV.

d) In cei 23 ani de când am propus această problemă am primit numai 4 soluții dela elevii de liceu, toate 4 complect inacceptabile din cauza raționamentului fals sau a ... *lipsei de raționament*, ca în următoarea soluție comică pe care o copiez întocmai:

„A poate fi: 0, 1, 4, 5, 6 și 9
„I „ „: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
„Pentru $n = 1$ avem patratele perfecte de 2 cifre
1, 4, 9, 16, 25, 36, 19, 81
„Patrate perfecte mai sunt și numerele 441 și 225
„Deci $n = {}^3/_2$".

Autorul acestei glume era în clasa a VII-a reală în Ianuarie 1922, când a trimis-o.

e) Pentru cazul $I_{2n}A$ se găsesc pe aceleași căi, soluțiile 441 și 225.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5144. *Să se arate că avem:*

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2(n-k)}{(2n^2+k^2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+nk\sqrt{2}+k^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n^2+k^2)}{n^4+k^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

când n *crește la infinit.*

LT. C. IONESCU-ȚIU.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA C. NICULESCU (Liceul „Titu Maiorescu", București), TEODOR A. ȘERBAN (student la Politechnica din București) și C. D. EFTIMIU (București).

Urmându-se îndrumările din articolul „*Câteva însumări*" de LT. C. D. IONESCU-ȚIU din revista *Pitagora*, anul II, Nr. 1, avem:

1°. Notăm cu y_m media aritmetică a ordonatelor funcțiunii

$$y = \frac{1-x}{(x^2+2)^2},$$

pe distanța cuprinsă între punctele de abscisă 0 și 1, și avem:

$$y_m = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1-\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+2} = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2(n-k)}{(2n^2+k^2)^2}$$

y_m mai este egal cu suprafața cuprinsă între curbă, axa absciselor și ordonatele corespunzătoare absciselor 0 și 1.

$$\text{Deci: } \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2(n-k)}{(2n^2+k^2)^2} = \int_0^1 \frac{(1-x)\,dx}{x^2+2} =$$

$$= \left[\frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2(x^2+2)} \right]_0^1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pentru celelalte relații procedăm la fel:

$$y = \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} \quad ; \quad y_m = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+nk\sqrt{2}+k^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} = \left[\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

$$3^0. \quad y = \frac{1+x^2}{1+x^4}; \quad y_m = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n^2+k^2)}{n^4+k^4} =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right]_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Observare. In acelaşi fel se pot calcula sume de felul

$$S = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi(k, n),$$

atunci când $\varphi(k, n)$ se poate pune sub forma

$$\varphi(k, n) = \frac{1}{n} \psi(k, n);$$

ψ fiind o funcţie omogenă şi de grad zero în k şi n.

C. I. Ţ.

PROBLEMA 5523. a) *Să se găsească un punct* M *în planul unui triunghiu* ABC, *astfel ca să avem:*

$$\frac{\overline{AM}}{h_a} = \frac{\overline{BM}}{h_b} = \frac{\overline{CM}}{h_c}.$$

Problema având două soluţii, să se arate că:

b) *Punctele* M_1 *şi* M_2 *se găsesc pe dreapta* Ok.

c) *Poziţiile lor sunt determinate de relaţiile:*

$$\overline{OM_1}^2 = R^2 \frac{\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3}}{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}; \quad \overline{OM_2}^2 = R^2 \frac{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}{\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3}}.$$

d) *Să se deducă distanţa*

$$\overline{M_1M_2}^2 = \frac{12R^2}{\operatorname{cot}^2\omega - 3}.$$

ION C. VASILIU.

Soluţie dată de D-l Sublocot. M. D. POPA.

a) şi *b)* Consider prima relaţie, pe care o scriu:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}.$$

De aci deducem că punctul M se găseşte pe cercul lui APOLONIUS care trece prin C şi picioarele bisectoarelor unghiului C.

Din celelalte relații rezultă că M se găsește la intersecția celor 3 cercuri APOLONIUS. Avem deci ca soluții ale problemei cele 2 puncte isodinamice, cari se știe că sunt pe dreapta Ok.

c) Se știe că cercul lui APOLONIUS trecând prin A, e tangent dreptei AO, iar axul său radical cu cercul ABC e simediana interioară a vârfului A (Ak). Punctul k fiind interior cercului ABC, va fi interior și fiecăruia din cele trei cercuri ale lui APOLIONIUS.

Din considerentele acestea, deducem relațiile:

$$(1) \qquad \overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2} = R^2.$$

$$(2) \qquad k\overline{M_1} \cdot k\overline{M_2} = \overline{Ok}^2 - R^2 = -3R^2 \operatorname{tg}^2\omega.$$

Relația (2) se mai scrie:

$$(\overline{Ok} - \overline{OM_1})(\overline{OM_2} - \overline{Ok}) = 3R^2 \operatorname{tg}^2\omega.$$

Sau:

$$\overline{Ok}(\overline{OM_1} + \overline{OM_2}) = 3R^2 \operatorname{tg}^2\omega + \overline{Ok}^2 + \overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2}$$

$$= 3R^2 \operatorname{tg}^2\omega + R^2 - 3R^2 \operatorname{tg}^2\omega + R^2 = 2R^2$$

$$(3) \qquad \therefore \quad \overline{OM_1} + \overline{OM_2} = \frac{2R^2}{\overline{Ok}} = R \cdot \frac{2 \operatorname{cotg}\omega}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}}.$$

Din (1) și (3) se deduce:

$$(4) \quad \begin{cases} \overline{OM_1} = R\dfrac{\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}} = R\sqrt{\dfrac{\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3}}{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}} \\ \overline{OM_2} = R\dfrac{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}} = R\sqrt{\dfrac{\operatorname{cotg}\omega - \sqrt{3}}{\operatorname{cotg}\omega + \sqrt{3}}} \end{cases}$$

d) Punctul O fiind exterior segmentului M_1M_2, scădem relațiile (4) și găsim:

$$\overline{M_1M_2} = \frac{2\sqrt{3}R}{\sqrt{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}}$$

$$\overline{M_1M_2}^2 = \frac{12R^2}{\operatorname{cotg}^2\omega - 3}.$$

D-l P. P. DRĂGHICESCU a rezolvat problema pe o cale mai lungă. D-sa a făcut o serie de observațiuni, cari rezultă însă din faptul că soluțiile problemei sunt punctele isodinamice ale triunghiului.

I. C. V.

PROBLEMA 5785. *Sub ce unghiu şi în ce punct este tăiat ecuatorul, de către cercul mare al sferei pământeşti, care trece prin* Bucureşti (*latitudine nordică* $\varphi = 44^0 27',7$ *şi longitudine estică* $\lambda_1 = 26^0 6',5$) *şi prin portul australian* Sidney (*latitudine sudică* $\varphi_2 = 33^0 57'$ *şi longitudine estică* $\lambda_2 = 151^0 14'$).

GENERAL GH. LITEANU.

Soluţie dată de D-l C. I. CHIRIAC.

Notăm cu B şi S cele două localităţi şi cu B', A şi S' punctele unde intersectează ecuatorul, respectiv, meridianul lui B, cercul mare BS şi meridianul lui S.

Din triunghiurile sferice dreptunghice în B' şi S' avem

$$\operatorname{tg} \widehat{B'AB} = \frac{\operatorname{tg} B'B}{\sin B'A} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \widehat{SAS'} = \frac{\operatorname{tg} SS'}{\sin AS'};$$

iar x fiind longitudinea lui A şi θ, unghiul cerut, obţinem

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\sin(x-\lambda_1)} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\sin(\lambda_2 - x)} = \operatorname{tg}\theta,$$

din cari relaţii se deduce

$$\frac{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1) = \operatorname{tg}\left[x - \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\right].$$

Inlocuind cu datele din enunţ, avem

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 10^0 30',7 \quad ; \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 78^0 24',7;$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_1) = 62^0 33',75 \quad ; \quad \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2) = 88^0 40',25$$

şi aplicând logartimii, obţinem:

$$\begin{aligned} \log \sin 10^0 30',7 &= \bar{1},261106 \\ \log \operatorname{tg} 62^0 33',75 &= 0,284683 \\ \operatorname{colog} \sin 78^0 24',7 &= 0,008946 \\ \log \operatorname{tg}(x - 88^0 40',25) &= \bar{1},574735 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x = 88^0 40',25 + 19^0 44'$$

$$x = 108^0 24',25$$

Utilizând relaţia $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\sin(\lambda_2 - x)}$,

unde $\varphi_2 = 33^0 57'$ şi $\lambda_2 - x = 42^0 49',75$ obţinem:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} 33^0 57' &= \bar{1},82817 \\ \operatorname{colog} \sin 42^0 49'75 &= 0,16762 \\ \log \operatorname{tg}\theta &= \bar{1},99579 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \theta = 44^0 43',3.$$

Rezultă că cercul mare trecând prin *Bucureşti* şi *Sidney* taie ecuatorul sub un unghiu de 44°43',3 în punctul de coordonate $\varphi = 0$ şi $\lambda = 108°24',25$.

Alte soluţii s'au primit dela D-nii: RADU P. VOINEA (Şcoala Politehnică Bucureşti) şi Aspirant SANDU R. TURCU.

Notă. Asupra acestei probleme, D-l CPT. C. V. COSTĂCHESCU, colegul nostru, a trimis o expunere, pe care din cauza reducerii formatului revistei, Redacţia regretă că nu o poate publica. Vom da aci, însă, un scurt rezumat — D-l Căpitan de lungă cursă C. V. COSTĂCHESCU, menţionează la început că acest gen de probleme face parte din problemele *Navigaţiei ortodromice*, importante marinarului sau aviatorului, care navigă pe arc de cerc mare. — Distanţa cea mai scurtă între 2 puncte de pe sfera pământească este arcul de cerc mare şi se numeşte *distanţa ortodromică.*

Insă, *ortodroma* taie meridianele sub unghiuri diferite şi pentru navigatori, aceasta nefiind posibil prin utilizarea hărţilor marine *mercator* se înlocueşte cu *loxodrama*, o linie care unind două puncte de pe suprafaţa pământului taie meridianele sub acelaşi unghiu, uşor de menţinut în mod practic de către timonier sau pilot.

Domnia-Sa menţionează, însă, că utilizând harta *gnomonică*, ortodroma apare ca o linie dreaptă şi pentru distanţele mari e mai avantajos a naviga pe ortodromă decât pe loxodromă.

In mod practic, pentru latitudini prea mari, nenavigabile şi care trebuesc evitate, se face uz de *navigaţia mixtă*, urmând 2 arcuri de ortodromă şi un arc al paralelului, pe care nu voim a-l depăşi.

Se arată apoi formulele care servesc la rezolvarea problemelor de genul celei propuse şi se fac calculele pentru datele din enunţ, ajungând la acelaşi rezultat ca D-l CHIRIAC. Domnia-Sa completează soluţia cu diferite puncte atinse de cercul mare *Bucureşti-Sidney*, şi termină anexând un tabel, rezultat al calculului punctelor intermediare ale ortodromei variind pe λ din 10° în 10°.

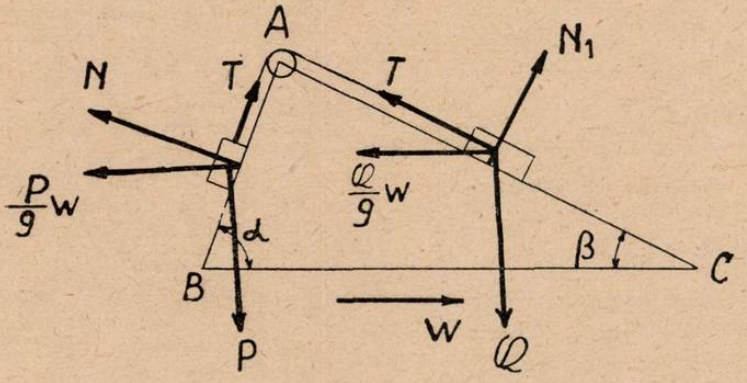
GENERAL G. I. LITEANU.

PROBLEMA 5934. *Două corpuri de greutăţi* P *şi* Q *sunt aşezate respectiv pe două plane* AB *şi* AC *înclinate cu unghiurile* α *şi* β *pe planul orizontal* BC. *Cele două corpuri sunt legate printr'un fir paralel cu linia de cea mai mare pantă a planelor respective şi trece peste un mic scripete de greutate neglijabilă situat în vârful* A. *Când sistemul* ABC *se află în repaos, corpurile date nu sunt în echilibru. Să se determine acceleraţia orizontală cu care trebuieşte deplasat sistemul* ABC *pentru ca cele două corpuri să rămână în repaos pe planele corespunzătoare. Frecările şi rezistenţa aerului se vor neglija.*

ALEXANDRU STOENESCU.

Soluție dată de D-nii: EUGEN CARAMALĂU și ALEXANDRU AL. TIMOTIN (Politechnica București) și C. CORDUNEANU.

Fie W acceleraţia orizontală necunoscută necesară menţinerii în echilibru a corpurilor de greutăţi P şi Q (a se vedea figura).



Corpul de greutate P, trebuind să fie în echilibru sub acţiunea greutăţii sale P, reacţiunii N a planului, tensiuni T în fir şi forţei de inerţie $\frac{P}{g}$ W, obţinem prin proiecţii pe direcţia AB şi pe o perpendiculară pe această direcţie:

$$T = P\sin\alpha + \frac{P}{g} W\cos\alpha \quad ; \quad N = P\cos\alpha - \frac{P}{g} W\sin\alpha.$$

Analog, pentru corpul de greutate Q obţinem:

$$T = Q\sin\beta + \frac{Q}{g} W\cos\beta \quad ; \quad N_1 = Q\cos\beta + \frac{Q}{g} W\sin\beta.$$

Rezultă:

$$P\sin\alpha + \frac{P}{g} W\cos\alpha = Q\sin\beta - \frac{Q}{g} W\cos\beta$$

$$W = \frac{g(Q\sin\beta - P\sin\alpha)}{P\cos\alpha + Q\cos\beta}.$$

Avem:

$$T = \frac{PQ\sin(\alpha+\beta)}{P\cos\alpha + Q\cos\beta} \quad ; \quad N = \frac{P[P + Q\cos(\alpha+\beta)]}{P\cos\alpha + Q\cos\beta};$$

$$N_1 = \frac{Q[Q + P\cos(\alpha+\beta)]}{P\cos\alpha + Q\cos\beta}.$$

AL. ST.

EXERCIŢII

30. *Să se integreze ecuaţiunea*

$$(x+1)\,p+(y+1)\,q=xy$$

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Conform teoriei scriem

$$(1)\qquad \frac{dx}{x+1}=\frac{dy}{y+1}=\frac{dz}{xy}.$$

Primele două rapoarte dau

$$\frac{x+1}{y+1}=c_1.$$

Inmulţim: cu y la primul raport cu x la al doilea, cu -2 la al treilea şi adunăm termen cu termen. Obţinem:

$$\frac{ydx+xdy-2dz}{x+y}=\frac{d\,(xy-2z)}{x+y}.$$

Adunăm primele două rapoarte dela (1), termen cu termen având astfel în continuare

$$\frac{d\,(xy-2z)}{x+y}=\frac{d\,(x+y)}{x+y+2}.$$

Scăzând acum termen cu termen acestea:

$$\frac{d\,(x+y-xy+2z)}{2}=\frac{dx}{x+1}$$

$$c_2\,(x+1)^2=e^{x+y-xy+2z}$$

$$\therefore\qquad e^{x+y-xy+2z}-(x+1)^2\,\varphi\left(\frac{x+1}{y+1}\right)=0.$$

31. *Intre elementele unui triunghiu avem*

$$(1)\qquad ab\cos^2\frac{C}{2}+bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}=p^2$$

$$(2)\qquad ab\sin^2\frac{C}{2}+bc\sin^2\frac{A}{2}+ca\sin^2\frac{B}{2}=ab+bc+ca-p^2$$

$$(3)\qquad ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B=2p^2-(ab+bc+ca)$$

$$(4)\qquad \frac{1}{r_a\,r_b}+\frac{1}{r_b\,r_c}+\frac{1}{r_c\,r_a}=\frac{ab+bc+ca-p^2}{S^2}.$$

M. D. COTARIU.

R. Pentru primele două egalităţi verificarea se face imediat făcând înlocuirile

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}}\quad,\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}},\ \ldots$$

Scăzând (2) din (1) şi ţinând seamă de

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

se obţine (3). Pentru (4) se ţine seamă de formulele

$$r_a=\frac{S}{p-a}\quad,\quad \frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S},\ \ldots$$

32. *Se dau punctele* A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) *şi se cere să se scrie ecuaţia paralelei la dreapta* AB *dusă prin vârful* C *al triunghiului echilateral* ABC.

GH. A. GRIGORE.

R. Fie M (λ, μ) un punct oarecare în planul triunghiului ABC. Una din cele două paralele duse prin M la AB are ecuaţia

$$(y_2-y_1)\,x-(x_2-x_1)\,y+(x_2-x_1)\,\mu-(y_2-y_1)\,\lambda=0. \qquad (1)$$

Latura triunghiului echilateral ABC este

$$a=\pm\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (2)$$

iar înălţimea acestui triunghiu este

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (3)$$

Scriind că distanţa dela M la AB este $\pm\ h$ găsim

$$(y_2-y_1)\,\lambda-(x_2-x_1)\,\mu=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,[x^2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2].$$

Ducând această valoare în (1) se găseşte că ecuaţiile căutate sun

$$(y_2-y_1)\,x-(x_2-x_1)\,y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2].$$

33. *Să se calculeze aria limitată de curba*

$$y^2=x^4-x^3+x^2$$

axa Ox *şi ordonatele corespunzătoare lui* $x=0$ *şi* $x=3$.

T. STOICESCU.

R. Avem:

$$I=\int_0^3 y\,dx=\int_0^3 x\sqrt{x^2-x+1}\,dx=\int_0^3\frac{x^3-x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx=$$

$$=\int_0^3\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}-\int_0^3\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}+\int_0^3\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}\,.$$

Aceste integrale se calculează prin reduceri succesive:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{a+bx+cx^2}}{nc} - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{a}{c}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}};$$

avem pentru integralele noastre:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\,\mathrm{L}\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{8x^2+10x-1}{24}\sqrt{x^2-x+1} - \frac{21}{48}\,\mathrm{L}\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

Deci:

$$I = \int_0^3 x\sqrt{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{48}\left[142\sqrt{7} - 10 + 9\,\mathrm{L}(5+2\sqrt{7})\right].$$

PROBLEME PROPUSE

6105*) Fie ABC un triunghiu oarecare şi $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic. Se notează cu R_1, R_2, R_3 şi r_1, r_2, r_3 razele cercurilor circumscrise şi înscrise în triunghiurile AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Să se demonstreze că:

$$\frac{R_1+R_2+R_3}{r_1+r_2+r_3} = \frac{R}{r}$$

R şi r fiind raza cercului circumscris şi înscris în triunghiul ABC.

E. N. WEGENER.

6111. Să se găsească numerele A, B care diferă cu 10 şi al căror produs este 99 ... 999.

G-L GH. BUICLIU.

6112. Să se arate că sistemul de ecuaţii

$$x\sin a + y\sin 2a = \sin 3a \quad , \quad x\sin 2a + y\sin 3a = \sin 4a,$$
$$x\cos a + y\cos 2a = \cos 3a$$

este compatibil. Să se rezolve.

I. I. STAMATE.

*) Problema 6105 publicată la pag. 367 din numărul trecut fiind tot una cu problema 5969 propusă la pag. 650, Vol. XLIX se înlocueşte cu prezenta.

6113. Din punctul A, exterior cercului O de rază R, se duc angentele AT şi AT_1 la cerc.

1. Să se ducă prin A o secantă, care să taie cercul O în punctele M şi N ($MA < NA$), astfel încât segmentul MN să fie egal cu latura patratului înscris în cercul O.

2. Să se demonstreze că cercul, de centru O_1 şi rază r, ce trece prin M şi este tangent dreptelor AT şi AT_1, în punctele T' şi T_1', este ortogonal cercului O.

3. Axul radical MM_1 al cercurilor O şi O_1, taie cercul circumscris trapezului $TT_1T_1'T'$, în punctele P şi P_1. Dreptele PT' şi PT_1', taie a doua oară cercul O_1 în punctele B şi C, iar dreptele PT şi PT_1 taie a doua oară cercul O în punctele D şi E.

Să se demonstreze că punctele A, B, C, D, E sunt coliniare.

4. Tangent cercurilor O, O_1 şi tangentei lor comune AT'T, se pot construi două cercuri de raze P_1 şi P_2.

Să se demonstreze că razele acestor cercuri, de raze ρ_1 şi ρ_2, sunt legate de razele R şi r, ale cercurilor O şi O_1 prin relaţia

$$\frac{1}{2\sqrt{\rho_1\rho_2}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}.$$

CĂPITAN AURELIAN STAN.

6114. Fie ABCD un patrulater înscris în cercul O şi EF cea de a treia diagonală a sa. Se consideră înălţimile triunghiului EBC. Centrele cercurilor, care trecând prin centrul cercului O au cu acesta ca axe radicale câte una din înălţimile triunghiului EBC, se găsesc pe o aceeaşi dreaptă D_1.

Prin construcţii analoage se obţin pentru triunghiurile EAD, FAB şi FCD dreptele D_2, D_3 şi D_4. Să se arate că dreptele D_1, D_2, D_3, D_4 sunt concurente.

THEODOR GH. COCEA.

6115. Se consideră două triunghiuri ABC şi LMN înscrise în acelaşi cerc. Să se arate că punctul lui MIQUEL al patrulaterului determinat de latura BC şi de dreptele lui SIMSON ale punctelor L, M şi N, în raport cu triunghiul ABC, coincide cu ortopolul dreptei BC, în raport cu triunghiul LMN.

ŞERBAN GHEORGHIU.

6116. Să se arate că suprafaţa unui triunghiu oarecare este dată de relaţia

$$S = \frac{1}{8} \frac{\sum \frac{a^2}{p-a} i_a}{\sum \cos \frac{A-B}{2}},$$

în care i_a, i_b, i_c sunt lungimile bisectoarelor interioare, celelalte notaţii fiind cele cunoscute. ION S. ANTONIU.

6117. Să se determine locul geometric al centrului de greutate al suprafeţei triunghiului format de tangenta la curba $xy = a^2$ şi axele de coordonate, când tangenta variază de-a-lungul curbei. GABRIELA ŢIŢEICA.

6118. Să se găsească funcţiunea continuă cea mai generală $\varphi(x, y, z)$, care satisface ecuaţia funcţională

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(y, z, x).$$

M. GHERMĂNESCU.

6119. Fie $[x]$ cel mai mare întreg $\leqslant x$, x fiind un număr real. Să se calculeze integrala

$$\int_0^1 [x + t]\, dt$$

şi să se deducă valoarea integralei multiple

$$\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 [x + t_1 + t_2 + \dots + t_n]\, dt_1\, dt_2 \dots dt_n.$$

TIBERIU POPOVICIU.

ERATĂ. 1°. La premiul „Inginer H. CAPRIEL" din numărul trecut se fac următoarele corecturi:

Pag. 346 rândul 14 de sus: *isomorf* în loc de *isoform.*
Pag. 346 rândul 9 de jos: *apropriată* în loc de *apropiată.*
Pag. 346 rândul 3 de jos: *nilpotent* în loc de *nilpotept.*
Pag. 347 rândul 4 de sus: *cuasi* în loc de *pseudo*
Pag. 347 rândul 10 de sus: *propositiile* în loc de *proporţiile.*
Pag. 347 rândul 14 de jos: *aus endlichen Ringen ganzer* în loc de *und ... ganzen.*
Pag. 437 la note se citeşte *Schiefkörper* în loc de *Schiefkoper* sau *Schiefkorper.*

2°. Pag. 353 primul cuvânt *Geometrie* se înlocueşte prin *Trigonometrie.*

3°. La soluţia problemei 2381 din numărul precedent se fac următoarele rectificări şi completări:

a) În formula (2) dela pag. 358 se înlocueşte

$$N^{i-1} + N^{i-2} + \dots \quad \text{prin} \quad N^{i-2} + N^{i-3} + \dots$$

b) După relaţia (3) se adaugă: (celelalte posibilităţi din (2) se vor examina la soluţia problemei 6074, propusă la pag. 270 din acest volum).

c) La pag. 359 rândul 6 de sus se înlocueşte $t = 1$ prin $t = 0$.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbu A. I. (P., 5882, 912, 53); *Bârzescu C. Al.* (6036); *Bârzescu M.* (6061, 72, 83, 93); *Başta M.* (6083); *Berdan C.* (4277); *Ciobanu D. R.* (6083, 6, 7); *Constantinescu N. I.* (6084, 7, 8, 92); *Constantinescu R. M.* (5838, 50, 6039, 42, 3, 66, 7, 97); *Corduneanu C.* (5928, 34); *Dumitrescu G. Tr.* (5674); *Enăchescu V. T.* (6083); *Gâlea N.* (6083); *Grigore A. Gh.* (5995, 6007, 13, 92); *Harghel E. I.* (5960, 6013, 41, 7, 97); *Iacob St. E.* Maior (P. E., 5841, 69, 907, 80, 6050, 65, 84, 6); *Marinescu E. E.* (P., 5917, 6097); *Mihăilescu I. St.* (6087); *Minculescu Al.* (6088); *Nicolae M. George* (5916, 54, 6036, 43, 53, 67); *Niculescu I. Al.* (6083); *Petculescu D. M.* (6088); *Popa C. Vasile* (6047), *Popescu I. Gh.* G-l (P); *Popescu A. Stelian* (6092); *Rolică M. Z.* (6088); *Răutu C. Titus* (6084); *Şaichin O. A.* (E); *Sâmboanu D. Gavril* (P., 6012, 3, 5, 33); *Teodorescu St. I.* (N., P., 5957); *Vargă I. A.* (P., 4360, 99, 6012, 33); *Vlad Mircea* (6088); *Vlăsie M. Gh.* (6083); *Wegener E.* (P., 6036, 66); *Zigu I. Segal* (6012, 3, 5, 27, 36, 9, 80, 8).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele ***se vor lipi sau coase în partea stângă,*** împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei *«Gazeta Matematică»* se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XVI şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 400

XX. **I. IChiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu,** *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 600

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 32.735.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 11. — IULIE 1945

SUMARUL

1. Informaţiuni cu privire la Semicentenarul „Gazetei Matematice" . . . . . *Delegaţia Societăţii.*
2. In legătură cu problema 4516 şi 5769 . *Petre Boldescu.*
3. Asupra inegalităţilor dintre valorile medii . . . . . *Mircea Adam.*
4. Raport asupra premiului „G. Ţiţeica" . *Comisiunea pentru premii.*
5. Note matematice: 40—43.
6. Chestiuni de examen.
7. Bibliografie.
8. Cereri.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 3430, 3823, 3933, 5638, 5798, 5800, 5906, 5916, 5959, 6029.
11. Exerciţii: 34—37.
12. Probleme propuse: 6120 — 6128.

ABON[illegible]L 1.000 LEI PE AN

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1945

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici, Directorul Statisticei Financiare; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **60**06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **1**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133.

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 400

INFORMAȚIUNI CU PRIVIRE LA SEMICENTENARUL GAZETEI MATEMATICE

Adunările generale ale *Gazetei Matematice* au fixat în principiu zilele de *20 și 21 Octombrie 1945* pentru ceremoniile jubileului de cincizeci de ani de apariție neîntreruptă a *Gazetei Matematice*.

Din sugestiile publicate la pag. 169 din acest an al *Gazetei Matematice* s'au fixat deocamdată executarea următoarelor puncte.

Expoziția cărții matematice românești, care va fi organizată cu acest prilej, va rămâne deschisă o lună de zile. Ea va cuprinde următoarele secțiuni:

1°. Colecțiile periodicelor românești de matematici.

2°. Colecția tezelor de doctorat în matematici ale Românilor.

3°. Cărți vechi românești de matematici (de ex.: AMFILOCHIE, ȘINCAI, LAZĂR, ELIADE RĂDULESCU, ORĂSCU, CULIANU, etc.).

4°. Manuale românești de învățământ superior.

5°. Cărți și extrase matematice publicate de Români.

6°. Cărți școlare de matematici.

7°. Fotografii ale marilor matematicieni români și ale instituțiilor de știință matematică. Fotografii dela concursurile *Gazetei Matematice*, dela diferite congrese matematice românești (de ex.: vizite de profesori străini, doctoratul h. c. al D-lui PAUL MONTEL, etc.).

8°. Eventual, diagrame, registre, condici, manuscrise, discuri din viața matematicii românești.

Rugăm pe oricine posedă material care se încadrează în aceste secțiuni să binevoiască a-l *împrumuta* societății *Gazeta Matematică* pentru expoziție. Rugăm ca trimiterile să fie făcute recomandat, pe numele delegației, cu mențiunea *Pentru expoziție*, până la *15 Septembrie 1945*. Tot materialul se va restitui după închiderea expoziției. Dacă unii dintre trimițători binevoesc să dăruiască acest material pentru colecțiile societății *Gazeta Matematică*, unde vor fi păstrate cu îngrijire, rugăm ca odată cu trimiterea, să ne vestească despre donație. Le mulțumim călduros, dinainte.

Medalie comemorativă. Se va bate, la Monetăria Statului, o medalie comemorativă în bronz, purtând efigiile, „stâlpilor" *Gazetei Matematice*, I. IONESCU, G. ȚIȚEICA, A. G. IOACHIMESCU și V. CRISTESCU.

Numărul acestor medalii este limitat, iar prețul unui exemplar este de 3000 lei sub rezerva eventualelor sporuri provenite din

majorări de salarii până la baterea medaliilor. Rugăm pe cei cari doresc să aibă această medalie să se înscrie cât mai neîntârziat la sediul societăţii, depunând câte 3000 lei şi indicând că suma este trimisă *pentru medalie.*

Mărci poştale jubilare. Guvernul român a aprobat emiterea unei serii de patru mărci jubilare pentru semicentenarul *Gazetei Matematice.* Aceste mărci vor avea valorile 1 leu, 35 lei, 40 lei + 20 lei şi 75 lei + 50 lei şi vor avea putere de francare timp de trei luni de zile, dela 15 August 1945 până la 15 Noembrie 1945 inclusiv.

Rugăm pe cei cari doresc să obţină direct dela noi (în afară de oficiile poştale) aceste timbre, să ne scrie urgent câte *serii* doresc să cumpere, trimiţând costul lor, cu indicaţia *pentru mărcile jubilare.*

Numărul festiv al *Gazetei Matematice* (Nr. 1 din 15 Septembrie 1945) se tipăreşte începând dela 15 Iulie 1945.

Volum comemorativ. Se va publica în Biblioteca *Gazeta Matematică* un volum comemorativ care va conţine istoricul *Gazetei Matematice* în ultimii zece ani, ca urmare a volumului publicat cu ocazia împliniri a patruzeci de ani. (Biblioteca *Gazeta Matematică*, Vol. XI).

Cu prilejul acestui jubileu se va încerca, dacă împrejurările o vor permite, să se organizeze şi un *Congres naţional al matematicienilor* la aceeaşi dată.

Rugăm pe membrii cari îşi propun să ia parte la jubileul *Gazetei,* să ne vestească până la 1 Septembrie, pentru a lua dispoziţiile, care ar fi necesare.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII

AL. BUNESCU, ŞERB. GHEORGHIU, P. SERGESCU.

IN LEGĂTURĂ CU PROBLEMELE 4516 şi 5769

Aceste două probleme, propuse de D-l N. N. MIHĂILEANU, şi rezolvate, una în G. M., Vol. XLVIII, pag. 270 şi cealaltă în aceeaşi revistă, Vol. L, pag. 48, împreună cu problema 5987, anunţată de acelaşi autor ca generalizare a primelor două şi nerezolvată încă, sunt aspecte particulare ale unei proprietăţi cu

caracter mai general, pe care ne propunem s'o demonstrăm aici, arătând în acelaşi timp şi alte particularizări remarcabile.

1. Să considerăm două puncte, M şi N, conjugate faţă de cercul circumscris triunghiului de referinţă, ABC. Punctele M şi N sunt în corespondenţă involutivă pe dreapta MN, punctele duble ale involuţiei fiind punctele, reale sau imaginare, de intersecţie, T şi T', ale acestei drepte cu cercul.

Fie M' şi N' izogonalele (inversele) punctelor M şi N. Zic că *dreapta M'N' trece printr'un punct fix.* Domonstraţia este simplă. Punctele M' şi N' descriu o conică circumscrisă triunghiului ABC, inversa triunghiulară a dreptei MN. Razele AM, AM' pe de o parte şi razele AN, AN' pe de altă parte, sunt în involuţie; dar AM este în involuţie cu AN, deci AM', AN' sunt raze ale unui fascicol involutiv şi, conform unei teoreme cunoscute, coarda M'N' trece printr'un punct fix. *Acest punct fix este centrul conicei transformata-triunghiulară a dreptei* MN. Intr'adevăr, dacă M (deci şi N) vine în T, M' şi N' sunt la infinit pe direcţia izogonalei dreptei AT; coarda M'N' devine tangenta la infinit, adică asimptotă. Când M vine în T' se obţine cealaltă asimptotă. Punctul fix este deci intersecţia celor două asimptote: centrul curbei. Se poate enunţa aşa dar următoarea:

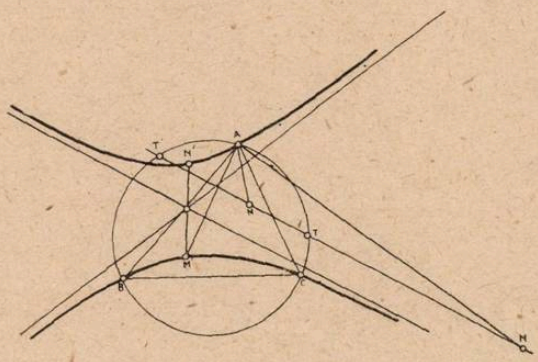


Fig. 1.

TEOREMĂ. *In transformarea prin inversiune triunghiulară a unei drepte, la punctele conjugate faţă de cercul circumscris triunghiului de referinţă, corespund puncte simetrice faţă de centrul conicei-transformate* (fig. 1).

Ea este cheia proprietăţilor care fac obiectul problemelor cu numerele 4516, 5769 şi 5987.

2. Dacă dreapta MN este un diametru al cercului circumscris, inversa ei triunghiulară este o iperbolă echilateră, care trece prin

ortocentru, izogonalul centrului O al cercului, conjugat cu punctul dela infinit al diametrului. Asimptotele curbei sunt dreptele lui SIMSON ale capetelor, T şi T', ale diametrului, deci centrul curbei este ortopolul dreptei MN. Deci:

M şi M' fiind două puncte izogonale într'un triunghiu oarecare şi φ ortopolul diametrului OM *al cercului circumscris acestui triunghiu, izogonalul simetricului ortocentrului triunghiului faţă de φ este punctul dela infinit al lui* OM, *iar izogonalul simetricului lui M' faţă de φ este un punct al lui* OM. Aceasta este, cu un alt enunţ, problema 5987 (fig. 2).

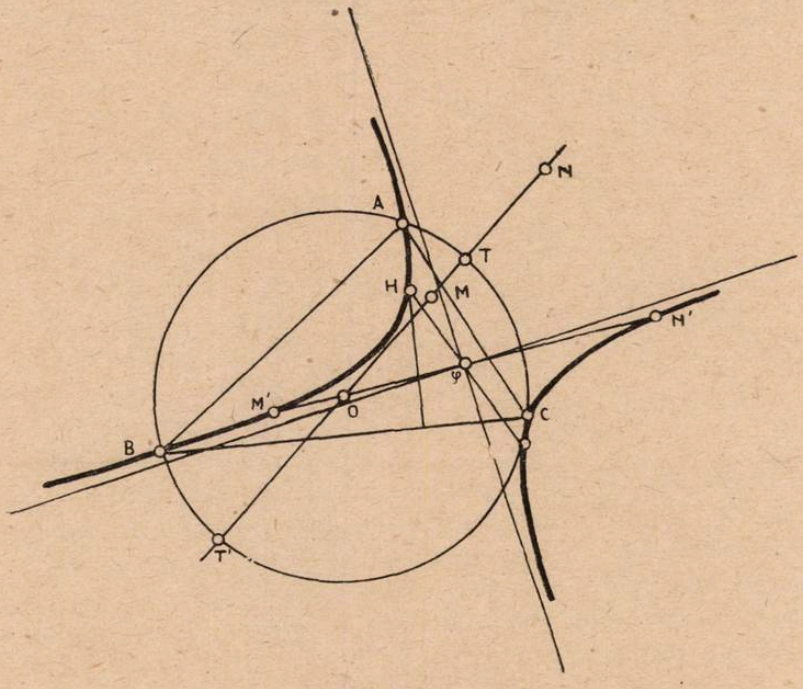


Fig. 2.

Dacă OM este dreapta lui EULER, căpătăm problema 4516, iar dacă OM este dreapta OI, căpătăm problema 5769 (în acest caz, φ devine punctul lui FEUERBACH).

Dacă OM coincide cu OK, două poziţii ale punctelor M şi N sunt punctele izodinamice, iar izogonalele lor sunt punctele izogone. Deci:

Centrul iperbolei lui KIEPERT, *ortopolul dreptei* OK, *este mijlocul segmentului care unește cele două puncte izogonale ale triunghiului de referință.*

3. Fie α, β, γ intersecțiile unei transversale oarecare cu laturile BC, CA, AB, ale triunghiului de referință, α', β', γ' conjugatele lor față de cercul circumscris. *Dreptele* $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ *sunt concurente*, căci, dacă notăm cu α'', β'', γ'' izogonalele punctelor α', β', γ', dreptele $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ sunt concurente conform cu § 1, A, B, C fiind izogonalele punctelor α, β, γ (fig. 3).

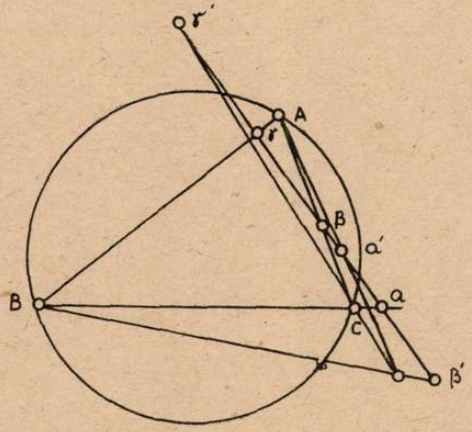


Fig. 3.

4. In cazul când dreapta TT' este tangentă la cercul circumscris triunghiului de referință, punctele T și T' se confundă în punctul de contact și considerațiile de sub § 1 nu mai au sens.

Se poate observa însă în acest caz că tangenta se transformă într'o parabolă circumscrisă triunghiului ABC și cu diametrii paraleli cu izogonala cevienei AT. Prin urmare:

Fie M un punct de tangenta în T și M' izogonalul lui. Prin mijlocul A' al laturii BC ducem o paralelă $A'x$ la izogonala cevienei AT și prin M', paralela M'M'' la latura BC a triunghiului, astfel ca mijlocul segmentului M'M'' să fie pe $A'x$. *Izogonalul lui* M'' *este un punct* N *situat pe tangenta în* T. (Căci M'' se află, evident, pe parabolă). Punctele M și N sunt în involuție, T este unul din punctele duble, celălalt punct dublu corespunzând vârfului diametrului $A'x$.

A, B, C, fiind puncte ale parabolei, considerațiile de mai sus ne conduc ușor la următoarea propietate:

Dacă prin vârfurile triunghiului medial se duc trei paralele, care taie laturile triunghiului antimedial în punctele α, β, γ *izo-*

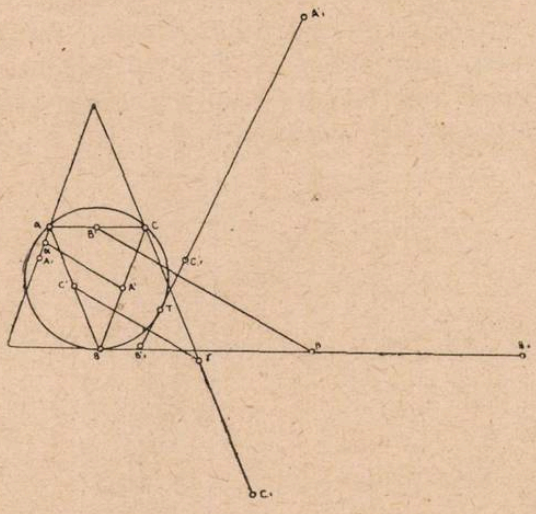


Fig. 4.

gonalelc simetricelor vârfurilor A, B, C, *ale triunghiului de referință față de punctele* α, β, γ *se află pe o tangentă la cercul circumscris triunghiului* ABC. *Punctul de contact al tangentei se găsește pe ceviana izogonală cu direcția celor trei paralele* (fig. 4).

PETRE BOLDESCU.

ASUPRA INEGALITĂȚILOR DINTRE VALORILE MEDII

In cele ce urmează ne propunem să extindem proprietatea cunoscută că media geometrică a unor cantități pozitive este mai mică decât media lor aritmetică și mai mare ca media lor armonică.

I. — Incepem prin a demonstra inegalitatea:

$$(1) \qquad \left[\frac{S_p}{C_n^p}\right]^2 \geqslant \frac{S_{p-1}}{C_n^{p-1}} \cdot \frac{S_{p+1}}{C_n^{p+1}} \qquad p < n$$

sau

$$(2)\quad E = p\,(n-p)\,S_p^2 - (p+1)\,(n-p+1)\,S_{p-1}\,.\,S_{p+1} \geqslant 0$$

în care

$$S_p = \Sigma a_1 a_2 \ldots a_p$$

suma cuprinzând toate combinațiile posibile a cantităților pozitive $a_1,\ a_2, \ldots\ a_n$ luate câte p.

Observăm că avem:

$$(\Sigma a_1 a_2 \ldots a_p)^2 = \Sigma\,(a_1 a_2 \ldots a_p)^2 + C_2^1\,\Sigma\,(a_1 a_2 \ldots a_{p-1})^2\,a_p\,a_{p+1} + \ldots$$

$$\ldots + C_{2i}^i\,\Sigma\,(a_1 a_2 \ldots a_{p-i})^2\,a_{p-i+1} \ldots a_{p+i} + \ldots + C_{2p}^p\,\Sigma a_1 a_2 \ldots a_{2p}$$

căci termenul general

$$(a_1 a_2 \ldots a_{p-i})^2\,a_{p-i+1} \ldots a_{p+i}$$

rezultă din înmulțirea a câte doi termeni de tipul $(a_1 a_2 \ldots a_{p-i})\,k$, unde k poate fi oricare din produsele din cantitățile a_{p-i+1}, a_{p-i+2}, $\ldots\ a_{p+i}$ luate câte i.

Pentru simplificare notăm:

$$A_{p-i} = \Sigma\,(a_1 a_2 \ldots a_{p-i})^2\ a_{p-i+1} \ldots a_{p+i}$$

astfel că relația de mai sus devine:

$$(3)\quad S_p^2 = A_p + C_2^1 A_{p-1} + \ldots + C_{2i}^i A_{p-i} + \ldots + C_{2p}^p A_0\,.$$

In mod analog se stabilește că:

$$(4)\quad S_{p-1}\,.\,S_{p+1} = A_{p-1} + C_4^1 A_{p-2} + \ldots + C_{2i}^{i-1} A_{p-i} + \ldots + C_{2p}^{p-1} A_0\,.$$

Folosind relațiile (3) și (4), expresia E din (2) devine:

$$E = \sum_{i=0}^{i=p} [p\,(n-p)\,C_{2i}^i - (p+1)\ (n-p+1)\,C_{2i}^{i-1}]\,A_{p-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{i=p} \frac{2i!}{i!\,(i+1)!}\,[p\ (n-p) - i\ (n+1)]\,A_{p-i}$$

însă

$$p\,(n-p) - i\,(n+1) = (p-i)\ (n-p-i) - i\,(i+1)$$

deci putem scrie

$$E = \sum_{i=0}^{i=p-1} \frac{2i!}{i!\,(i+1)!}\,(p-i)\ (n-p-i)\,A_{p-1} -$$

$$- \sum_{i=1}^{i=p} \frac{(2i-2)}{(i-1)!\,i!}\,2i\ (2i-1)\ A_{p-i}$$

sau

$$E = \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{2i!}{i!(i+1)!}[(p-i)(n-p-i)A_{p-i} - (2i+2)(2i+1)A_{p-i+1}].$$

Pe de altă parte avem:

$$B_{p-i-1} = \Sigma (a_1 a_2 \ldots a_{p-i-1})^2 a_{p-i} \ldots a_{p+i-1} (a_{p+i} - a_{p+i+1})^2 =$$

$$k_1 \Sigma (a_1 a_2 \ldots a_{p-i})^2 a_{p-i+1} \ldots a_{p+i} - k_2 \Sigma (a_1 a_2 \ldots a_{p-i-1})^2 a_{p-i} \ldots a_{p+i+1}$$

unde determinarea coeficienților k_1 și k_2 se poate face imediat, comparând pentru fiecare categorie de termeni, numărul termenilor din ambii membrii:

$$2C_n^{p-i-1} C_{n-p+i+1}^{2i} C_{n-p+i-1}^{2i} = k_1 C_n^{p-i} C_{n-p+i}^{2i} = k_2 C_n^{p-i-1} C_{n-p+i+1}^{2i+2}$$

de unde:

$$k_1 = (p-i)(n-p-i) \qquad k_2 = (2i+2)(2i+1)$$

deci

$$(6) \quad B_{p-i-1} = (p-i)(n-p-i)A_{p-i} - (2i+2)(2i+1)A_{p-i-1}.$$

Comparând între ele relațiile (5) și (6) găsim identitatea:

$$p(n-p)S_p^2 - (p+1)(n-p+1)S_{p-1}S_{p+1} = \sum_{i=0}^{i=p-1} \frac{2i!}{i!(i+1)!} B_{p-i-1}$$

în care membrul II rămâne continuu pozitiv, căci termenii B_k sunt pozitivi devenind zero în cazul $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, ceeace demonstrează inegalitatea (1).

Expresia $\frac{S_p}{C_n^p}$ nu este altceva decât media aritmetică a tuturor combinațiilor cantităților $a_1, a_2 \ldots a_n$ luate câte p și o vom nota cu M_p.

Rezultă că vom avea următorul șir de inegalități:

$$\frac{M_{p+1}}{M_p} \leqslant \frac{M_p}{M_{p-1}} \leqslant \frac{M_{p-1}}{M_{p-2}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{M_2}{M_1} \leqslant M_1$$

sau

$$\frac{M_{p+1}}{M_p} \leqslant \frac{M_p}{M_{p-1}} \; ; \; \frac{M_{p+1}}{M_p} \leqslant \frac{M_{p-1}}{M_{p-2}} \; ; \; \ldots \; \frac{M_{p+1}}{M_p} \leqslant M_1$$

inegalități cari toate au ambii membrii pozitivi și egalitatea în același caz $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, deci pot fi înmulțite între ele membru cu membru, în care caz obținem:

$$(M_{p+1})^p \leqslant (M_p)^{p+1} \quad \text{sau} \quad \sqrt[p]{M_p} \geqslant \sqrt[p+1]{M_{p+1}}$$

adică şirul de inegalităţi:

$$(7)\quad \frac{\Sigma a_1}{n} \geqslant \sqrt{\frac{\Sigma a_1 a_2}{C_n^2}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{\Sigma a_1 a_2 a_3}{C_n^3}} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Dacă în aceste inegalităţi înlocuim pe $a_1, a_2, \ldots a_n$ prin $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_n}$, mediile aritmetice M_p se înlocuesc prin mediile armonice M_p':

$$\frac{1}{M_p'} = \frac{1}{C_n^p} \Sigma \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_p}$$

şi avem:

$$(8)\quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \sqrt{\frac{C_n^{n-1}}{\Sigma \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}}} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt{\frac{C_n^2}{\Sigma \frac{1}{a_1 a_2}}} \geqslant \frac{n}{\Sigma \frac{1}{a_1}}$$

II. — In identitatea lui LAGRANGE:

$$\sum_1^n a_i^2 \sum_1^n b_i^2 - \left[\sum_1^n a_i b_i\right]^2 = \sum_{i,\,k=1}^{n} (a_i b_k - a_k b_i)^2$$

înlocuim pe a_i^2 şi b_i^2 respectiv prin a_i^{p-1} şi a_i^{p+1}, unde $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt cantităţi pozitive diferite de zero, iar p un număr întreg şi pozitiv, obţinem inegalitatea:

$$\sigma_{p-1} \cdot \sigma_{p+1} \geqslant \sigma_p^2$$

în care am notat:

$$\sigma_p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p$$

egalitatea membrilor având loc pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Deci avem şirul de inegalităţi:

$$\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p} \geqslant \frac{\sigma_p}{\sigma_{p-1}} \geqslant \frac{\sigma_{p-1}}{\sigma_{p-2}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \geqslant \frac{\sigma_1}{n}$$

sau

$$\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p} \geqslant \frac{\sigma_p}{\sigma_{p-1}} \quad ; \quad \frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p} \geqslant \frac{\sigma_{p-1}}{\sigma_{p-2}} \quad ; \quad \ldots \frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p} \geqslant \frac{\sigma_1}{n}$$

inegalităţi cari au toate ambii membrii pozitivi şi egalitatea în acelaşi caz $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, deci pot fi înmulţite membru cu membru, în care caz obţinem:

$$n\sigma_{p+1}^p \geqslant \sigma_p^{p+1} \quad \text{adică} \quad \sqrt[p+1]{\frac{\Sigma a_i^{p+1}}{n}} \geqslant \sqrt[p]{\frac{\Sigma a_i^p}{n}}$$

inegalitate în care dacă înlocuim pe a_i prin $a_i^{\frac{1}{p(p+1)}}$, obţinem:

$$\left[\frac{\sum \sqrt[p]{a_i}}{n}\right]^p \geqslant \left[\frac{\sum \sqrt[p+1]{a_i}}{n}\right]^{p+1}$$

Rezultă că vom avea şirul de inegalităţi:

$$(9)\quad \sqrt[p]{\frac{\sum a_i^p}{n}} \geqslant \sqrt[p-1]{\frac{\sum a_i^{p-1}}{n}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\sum a_i}{n} \geqslant \left[\frac{\sum \sqrt{a_i}}{n}\right]^2 \geqslant \ldots$$

$$\ldots \geqslant \left[\frac{\sum \sqrt[p-1]{a_i}}{n}\right]^{p-1} \geqslant \left[\frac{\sum \sqrt[p]{a_i}}{n}\right]^p$$

Aceste inegalităţi rămân valabile şi pentru valorile fracţionare ale lui p. Pentru a arăta aceasta să considerăm numerele întregi şi pozitive m, r_1, r_2, s_1, s_2 astfel ca:

$$m+1 > \frac{r_1}{s_1} > \frac{r_2}{s_2} > m$$

şi să arătăm că:

$$\sqrt[m+1]{\frac{\sum a_1^{m+1}}{n}} \geqslant \sqrt[\frac{r_1}{s_1}]{\frac{\sum a_1^{\frac{r_1}{s_1}}}{n}} \geqslant \sqrt[\frac{r_2}{s_2}]{\frac{\sum a_1^{\frac{r_2}{s_2}}}{n}} \geqslant \sqrt[m]{\frac{\sum a_1^m}{n}}$$

ori dacă notăm $\alpha_i = a_i^{\frac{1}{s_1 s_2}}$ şi ridicăm toate aceste inegalităţi la puterea $\frac{1}{s_1 s_2}$ obţinem:

$$\sqrt[(m+1)\,s_1\,s_2]{\frac{\sum \alpha_1^{(m+1)\,s_1\,s_2}}{n}} \geqslant \sqrt[r_1\,s_2]{\frac{\sum \alpha_1^{r_1\,s_2}}{n}} \geqslant \sqrt[r_2\,s_1]{\frac{\sum \alpha_1^{r_2\,s_1}}{n}} \geqslant \sqrt[m\,s_1\,s_2]{\frac{\sum \alpha_1^{m\,s_1\,s_2}}{n}}$$

adevărate în virtutea inegalităţilor (9) deoarece:

$$(m+1)\,s_1\,s_2 > r_1\,s_2 > r_2\,s_1 > m s_1\,s_2.$$

Inegalităţile (9) rămân valabile şi pentru valorile iraţionale ale lui p, deoarece procedând ca mai sus putem găsi două numere raţionale p_1 şi p_2 astfel ca

$$m+1 > p_1 > p > p_2 > m \quad \text{şi} \quad p_1 - p_2 < \varepsilon$$

ε putând fi oricât de mic.

Rezultă că inegalitățile (9) au loc pentru toate valorile reale ale lui p cuprinse între 0 și ∞. Rămâne să vedem ce devin ele pentru valorile externe.

Avem:

$$(10) \qquad \lim_{p\to\infty} E = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\frac{\Sigma a_i^p}{n}} = a_1$$

unde am considerat $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, căci aplicând logaritmi și regula lui L'HOSPITAL, avem:

$$\lim_{p\to\infty} LE = \lim_{p\to\infty} \frac{L\Sigma a_i^p}{p} = \lim_{p\to\infty} \frac{\Sigma a_i^p La_i}{\Sigma a_i^p}$$

și deoarece am considerat că a_1 este cea mai mare din cantitățile $a_1, a_2, \ldots a_n$, avem:

$$\lim_{p\to\infty} LE = \lim_{p\to\infty} \frac{La_1 + \sum_2^n \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^p La_i}{1 + \sum_2^n \left(\frac{a_i}{a_1}\right)^p} = La_1.$$

Pentru cazul $p = 0$ problema este cunoscută (prob. 37, Cap. XV, C. P. Algebră II) și avem:

$$\lim_{p\to\infty} E = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Dacă în inegalitățile (9) înlocuim pe a_i prin $\frac{1}{a_i}$ vedem că inegalitățile acestea rămân valabile și pentru valorile negative ale lui p, cu singura deosebire că limita (10) este $\frac{1}{a_n}$, a_n fiind cea mai mică din cantitățile $a_1, a_2, \ldots a_n$.

III. — Din cele demonstrate până acum putem trage următoarele concluzii:

1°. Dacă considerăm mediile aritmetice:

$$M_p = \frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n} \quad ; \quad M_q = \frac{\Sigma a_1 a_2 \ldots a_q}{C_n^q}$$

şi mediile armonice

$$\frac{1}{M'_p} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{a_1^p} + \frac{1}{a_2^p} + \ldots + \frac{1}{a_n^p}\right] \quad ; \quad \frac{1}{M_q} = \frac{1}{C_n^q} \sum{}' \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_q}$$

unde $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, iar p, p', p'' sunt numere reale pozitive ($p > p'$ şi $p'' > 1$) şi q, q' numere întregi şi pozitive ($n > q > q'$), avem:

$$(11) \quad a_1 \geqslant \sqrt[p]{M_p} \geqslant \sqrt[p']{M_{p'}} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \sqrt[p']{M'_{p'}} \geqslant \sqrt[p]{M'_p} \geqslant a_n$$

$$(12) \quad a_1 \geqslant \sqrt[p']{M''_p} \geqslant \sqrt[q']{M_{q'}} \geqslant \sqrt[q]{M_q} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[q]{M'_q} \geqslant \sqrt[q']{M'_{q'}} \geqslant \sqrt[p'']{M'_{p''}} \geqslant a_n$$

inegalităţile devenind egalităţi pentru $a_1 = a_2 = a_n$.

Inegalităţile (11) şi (12) extind inegalităţile cunoscute dintre media aritmetică, geometrică şi armonică a unor cantităţi pozitive (TH. ANGHELUŢĂ Curs de Algebră Superioară, pag. 22 şi 173 sau Culegere de Probleme Algebră A. G. IOACHIMESCU, partea I, Cap. VIII, prob. 18).

Inegalităţile (11) sunt cunoscute. Le găsim demonstrate în Calculul Probabilităţilor de O. ONICESCU şi GH. MIHOC la pag. 55, folosind pentru demonstrare inegalitatea HÖLDER-IENSEN. Am menţinut demonstraţia prin identitatea lui LAGRANGE ca fiind mai elementară, mai ales că în Calculul Probabilităţilor citat se foloseşte această cale pentru demonstrarea inegalităţei $\sqrt{M_2} \geqslant M_1$ şi se exprimă credinţa că demonstraţia nu poate fi extinsă la cazul general.

2°. Un alt aspect al rezultatelor de mai sus îl constitue extinderea cunoscutelor teoreme de aflarea directă a maximului unui produs sau a minimului unei sume. S ex.: Se vede imediat că expresia:

$$E = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$$

este minimă pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ dacă una din sumele:

$$\sum_{x_1}^{p} \quad (m > p) \quad \text{sau} \quad \sum x_1 x_2 \ldots x_q \quad (m > 1)$$

este constantă sau devine minimă pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dăm mai jos un tablou cuprinzând posibilitățile de găsirea directă a maximului sau a minimului.

Expresia a cărui minim sau maxim căutăm		RELAȚIA DE CONDIȚIE				
		Σx_1^p	$\Sigma x_1 x_2 \dots x_q$	$x_1 x_2 \dots x_n$	$\Sigma \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_{q'}}$	$\Sigma \frac{1}{x_1^{q''}}$
Σx_1^m	min.	$m > p$ constantă sau minimă	$m > 1$ constantă sau minimă	constantă sau minimă	constantă sau maximă	constantă sau maximă
	max.	$m < p$ constantă sau maximă	—	—	—	—
$\Sigma x_1 x_2 \dots x_m$ $m < n$	min.	—	$m < q$ constantă sau minimă	constantă sau minimă	constantă sau maximă	constantă sau maximă
	max.	$p > 1$ constantă sau maximă	$m > q$ constantă sau maximă	—	—	—
(13) $x_1 x_2 \dots x_n$	min.	—	—	—	constantă sau maximă	constantă sau maximă
	max.	$p > 0$ constantă sau maximă	$q < n$ constantă sau maximă	—	—	—
$\Sigma \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n}$ $m < n$	min.	constantă sau maximă	constantă sau maximă	constantă sau maximă	$m < q'$ constantă sau minimă	—
	max.	—	—	—	$m > q'$ constantă sau maximă	$p' > 1$ constantă sau maximă
$\Sigma \frac{1}{x_1^m}$	min.	constantă sau maximă	constantă sau maximă	constantă sau maximă	$m > 1$ constantă sau minimă	$m > p'$ constantă sau minimă
	max.	—	—	—	—	$m < p'$ constantă sau maximă

Cantitățile $x_1, x_2, \dots x_n$ sunt pozitive diferite de zero. Numerele p, p', m, q, q' sunt pozitive, q și q' fiind întregi mai mici ca n. Se iau în considerație numai maximele și minimele cari au loc pentru $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

IV. — Pentru a se vedea cât de numeroase sunt aplicațiile rezultatelor obținute mai sus vom da câteva extinderi și generalizări de inegalități cunoscute.

In aplicațiile trigonometrice vom întrebuința notațiunile obișnuite pentru elementele triunghiului și vom considera cunoscute inegalitățile:

$$3\sqrt{3}\,R \geqslant 2p \geqslant 6\sqrt{3}\,r$$

din care se deduce

$$3R^2 \geqslant \left(\frac{2p}{3}\right)^2 \geqslant \frac{4S}{\sqrt{3}} \geqslant 12r^2.$$

1°. Dacă a_1^p, a_2^p ... a_n^p sunt cantităţi pozitive, din inegalitatea:

$$\sqrt[p]{M_p} \geqslant \sqrt[p]{M_p}$$

deducem pentru $2 \leqslant p \leqslant n$:

$$C_n^p (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p) \geqslant n \Sigma a_1 a_3 \ldots a_p.$$

(Prob. 6, Cap. VIII, Culegere de Probleme Algebră I).

2°. Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt cantităţi pozitive şi:

$$p > n \geqslant q > 0$$

deducem:

$$C_n^q \Sigma a_1^p \geqslant \Sigma a_1^{p-q} . \Sigma a_1 a_2 \ldots a_q$$

(Prob. 21, Cap. VIII, Culegere de Probleme Algebră I)

3°. Dacă $a_1, a_2, \ldots a_n$ sunt cantităţi pozitive şi:

$$p > q > 0$$

din inegalităţile:

$$\sqrt[p]{M_p} \geqslant \sqrt[q]{M_q} \quad \text{şi} \quad \sqrt[p]{M_p} \geqslant \sqrt[p-q]{M_{p-q}}$$

deducem

$$(n-1)(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p) \geqslant \Sigma a_i^p a_k^{p-q}.$$

(Prob. 22, Cap. VIII, C. P. Algebră I).

4°. Dacă $a_1^p, a_2^p, \ldots a_n^p$ şi $b_1^p, b_2^p, \ldots b_n^p$ sunt cantităţi pozitive, din inegalitatea:

$$\sqrt[p]{M_p} \geqslant \sqrt{M_2}$$

şi din identitatea lui LAGRANGE deducem pentru $p \geqslant 2$:

$$n^{p-2}(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)(b_1^p + b_2^p + \ldots + b_n^p) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^p.$$

(Prob. 15, Cap. VIII, C. P. Algebră I).

5°. Din relaţiile cunoscute:

$$a + b + c = 2p \qquad abc = 4RS \geqslant \left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2 - OH^2 \leqslant 9R^2$$

folosind tabloul (13) și inegalitățile (15) obținem:

$$m>1 \quad a^m+b^m+c^m \geqslant 3\left[\frac{2p}{3}\right]^m \geqslant 3\left[\frac{4S}{\sqrt{3}}\right]^{\frac{m}{2}} \geqslant 3\,(2\sqrt{3}r)^m$$

$$2\geqslant m>0 \quad a^m+b^m+c^m \leqslant 3\,(R\sqrt{3})^m$$

$$1>m>0 \quad 3\,(R\sqrt{3}^m \geqslant 3\left(\frac{2p}{3}\right)^m \geqslant a^m+b^m+c^m \geqslant 3\left[\frac{4S}{\sqrt{3}}\right]^{\frac{m}{2}} \geqslant 3\,(2\sqrt{3}r)^m.$$

(Prob. 8 și 14, Cap. XX, C. P. Trigonometrie II).

$$m>0 \qquad \frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m} \geqslant 3\left(\frac{3}{2p}\right)^m \geqslant \frac{3}{(R\sqrt{3})^m}$$

din care deducem:

$$2\geqslant m>0 \qquad \sin^m A+\sin^m B+\sin^m C \leqslant 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m$$

$$m>0 \qquad \operatorname{cosec}^m A+\operatorname{cosec}^m B+\operatorname{cosec}^m C \geqslant 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^m$$

6°. Din relațiile:

$$r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a=p^2 \qquad \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{9}{2}R \geqslant r_a+r_b+r_c=4R+r \geqslant 9r$$

se poate obține oricare din inegalitățile:

$$m\geqslant 1 \quad r_a^m+r_b^m+r_c^m \geqslant 3\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^m \geqslant 3\,(\sqrt{3S})^{\frac{m}{2}} \geqslant 3\,(3r)^m.$$

$$1>m>0 \quad 3\left(\frac{3R}{2}\right)^m \geqslant r_a^m+r_b^m+r_c^m \geqslant 3\,(3r)^m$$

$$1>m>0 \qquad \frac{3}{(3r)^m} \geqslant \frac{1}{r_a^m}+\frac{1}{r_b^m}+\frac{1}{r_c^m} \geqslant 3\left(\frac{\sqrt{3}}{p}\right)^m$$

$$m\geqslant 1 \qquad \frac{1}{r_a^m}+\frac{1}{r_b^m}+\frac{1}{r_c^m} \geqslant \frac{3}{(3r)^m} \geqslant 3\left(\frac{\sqrt{3}}{p}\right)^m$$

(Prob. 9 și 11, Cap. XX, C. P. Trigonometrie II)

de unde

$$m<0 \text{ sau } m\geqslant 1 \quad \operatorname{tg}^m\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^m\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^m\frac{C}{2}\geqslant\frac{3}{(\sqrt{3})^m}$$

(Prob. 26 şi 28, Cap. XIX, C. P. Trigonometrie I)

$$1>m>0 \quad \operatorname{tg}^m\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^m\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^m\frac{C}{2}\geqslant 3\left(3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^m$$

(Prob. 25, Cap. XIX, C. P. Trigonometrie I).

$$1>m>0 \quad \operatorname{ctg}^m\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}^m\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}^m\frac{C}{2}\leqslant 3\left(\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)^m$$

7°. Din relaţiile:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}=\frac{2}{h_a} \text{ etc.}$$

obţinem:

$$0<m<1 \quad r_a^m+r_b^m+r_c^m\geqslant h_a^m+h_b^m+h_c^m$$

$$0<m<1 \quad \frac{1}{r_a^m}+\frac{1}{r_b^m}+\frac{1}{r_a^m}\leqslant\frac{1}{h_a^m}+\frac{1}{h_b^m}+\frac{1}{r_c^m}.$$

MIRCEA ADAM.

RAPORT ASUPRA PREMIULUI „G. ŢIŢEICA"

Examinând conţinutul volumului XLIX al revistei *Gazeta Matematică* cu preocuparea de a urmări activitatea corespondenţilor revistei în legătură cu premiul de geometrie „Profesor G. ŢIŢEICA", am constatat că D-l MIRCEA D. POPA (Şcoala de ofiţeri de artilerie Piteşti) se pune în evidenţă prin publicarea (în Nr. 10 al acestui volum) articolului de geometrie: „Asupra dreptei WALACE-SIMSON", dând generalizări ale cunoscutei teoreme şi consecinţe în legătură cu articolele publicate în *Gazeta Matematică* ale D-lor Profesori N. ABRAMESCU şi N. N. MIHĂILEANU. Pe lângă acest articol, D-l MIRCEA D. POPA cu ocazia rezolvării a unor probleme de geometrie arată o pricepere deosebită: La problema 3019 este singur rezolvitor, la problema 5321 dă o

soluție *aparte*, extrem de simplă; apoi rezolvitor în probleme cu doi sau trei rezolvitori (5337, 5247, 4636, 5455) și în alte probleme de geometrie (5301, 5413, 5434, 5020).

Având în vedere cele de mai sus îl propunem Adunării generale pentru acordarea premiului „Profesor G. ȚIȚEICA", fiind încredințați că această dreaptă apreciere îi va lega și pentru viitor asidua colaborare de revista Societății noastre *Gazeta Matematică*.

COMISIA ALEASĂ PENTRU PREMIU
GABRIELA ȚIȚEICA, Prof. O. N. ȚINO,
Prof. P. SERGESCU.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 19 Februarie 1945.

NOTE MATEMATICE

40. *O observație asupra unor problemi cu numere prime.* Problema 5437 și nota 45 din G. M., XLVIII m'au determinat să fac o observație pe care o socotesc importantă.

In adevăr, sprijinindu-ne pe teorema lui BERTRAND (demonstrată de TCHEBJCHEV) putem stabili unele relații între două numere prime consecutive, făcând raționamentul că între a și $2(a-1)$, de pildă (BERTRAND) este un număr prim, când de fapt este *„cel puțin"* un număr prim. Astfel între $a = 10$ și $2(a-1) = 18$ sunt trei numere prime: 11, 13, 17.

I. L.

41. *Asupra unui articol.* D-l Comandor I. LINTEȘ demonstrează următoarele două inegalități [1]).

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \varphi_m(a_i) \geqq \varphi_m\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right),$$

$$(3) \qquad \prod_{i=1}^{n} \varphi_m(a_i) \leqq \varphi_m\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right),$$

1) Comandor I. LINTEȘ, « *Indicatorul de ordin superior al unei sume și al unui produs* », G. M., XLIX, 709—711, 1944.

unde $\varphi_m(a)$ este indicatorul iterat de ordinul m al lui a. D-l I. LINTEŞ demonstrează aceste inegalităţi sub una din următoarele două ipoteze:

I. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sunt prime între ele.*

II. *Pentru fiecare* $i = 0, 1, \ldots, m-1$, *numerile*

$$\varphi_i(a_1), \quad \varphi_i(a_2), \ldots, \varphi_i(a_n) \qquad (\varphi_0(a) = a)$$

au aceiaşi factori primi [1]).

Asupra demonstraţiilor trebuesc făcute însă anumite rezerve. De altfel, formula (1) *nu este adevărată* sub ipoteza I, după cum ne arată exemplul [2]).

$$n = 2 \quad , \quad a_1 = 5 \quad , \quad a_2 = 26.$$

Sub ipoteza II inegalitatea (1) este adevărată şi revine la proprietatea următoare:

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *au aceiaşi factori primi avem*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) \geqq \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right).$$

Demonstraţia este uşoară dacă se observă că avem

$$\frac{\varphi(a_1)}{a_1} = \frac{\varphi(a_2)}{a_2} = \ldots = \frac{\varphi(a_n)}{a_n} \quad \text{şi} \quad \frac{\varphi(a_1)}{a_1} \geqq \frac{\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i},$$

deoarece toţi factorii primi ai lui a_1 divid pe $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Inegalitatea (2) a D-lui Comandor I. LINTEŞ este mult mai interesantă. *Această inegalitate este adevărată oricare ar fi numerile* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *şi indicele* m. Voi demonstra acest lucru altă dată.

T. P.

---

1) D-l I. LINTEŞ formulează această condiţie altfel, în demonstraţia care urmează D-sa se bazează însă pe ipoteza aici enunţată.

2) Alte exemple de acest fel se pot construi uşor. Mai observăm că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt n numere date, inegalitatea (1) este adevărată *pentru* m *destul de mare*, căci, pentru un astfel de m, toţi indicatorii cari intervin în formulă sunt egali cu 1.

42. *Asupra problemei 3610.* La soluția ce s'a dat acestei probleme în Vol. XLIX, pag. 303, au fost omise 3 combinații posibile și anume:

Nr. combinației	Combinația de rezistențe	Valoarea rezistenței rezultante	Valoarea rezistenței rezultante în cazul particular ohm
22	2 rezistențe în paralel, în paralel cu 2 rezistențe în serie, totul în serie cu o rezistență	$\frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2} + R_5$	280
23	2 rezistențe în paralel în serie cu o rezistență, totul în paralel cu 2 rezistențe în serie	$\frac{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)(R_4 + R_5)}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4 + R_5)}$	171,4...
24	2 rezistențe în paralel în serie cu o rezistență, în paralel cu o rezistență, totul în serie cu o rezistență	$\frac{(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) R_4}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} + R_5$	320

De asemenea, la combinația Nr. 17, valoarea rezistenței în cazul particular este de 533,3 ohm și nu de 133,3 ohm cum din greșeală s'a tipărit.

I. S. A.

43. *Asupra articolului „Generalizarea teoremei lui* DROZ-FARNY". (G. M., XLVI, p. 630). In citatul articol D-l I. C. VASILIU generalizează următoarea proprietate enunțată de DROZ-FARNY: „Laturile unui unghiu drept care are vârful în ortocentrul unui triunghiu, determină pe laturile acestui triunghiu segmente ale căror mijloace sunt colineare".

Vom da câteva note bibliografice asupra acestei chestiuni:

1. D-l AD. MINEUR arată (*Mathesis* 1925, p. 28) că teorema de mai sus a fost enunțată întâiu de A. NOYER în *Journal de Mathé-*

matiques Spéciales (1893, p. 39) ca un caz particular al următoarei:

„Mijloacele segmentelor determinate de doi diametri conjugați ai unei conice pe laturile unui triunghiu autopolar relativ la această conică sunt 3 puncte în linie dreaptă".

Ulterior DROZ-FARNY a publicat proprietatea generalizată de D-l I. C. VASILIU și care, prin urmare, ar trebui numită teorema lui A. NOYER, cum observă și D-l AD. MINEUR.

2. Teorema generală a lui A. NOYER a fost generalizată de D-l CL. SERVAIS astfel:

„Doi diametri conjugați d, d' ai unei conice Σ conjugată triunghiului ABC, determină pe laturile a, b, c ale acestui triunghiu perechile de puncte (D_a, D'_a), (D_b, D'_b), (D_c, D'_c).

Punctele X_a, X_b, X_c luate respectiv pe laturile a, b, c astfel ca

$$\frac{\overline{D_a X_a}}{\overline{D'_a X_a}} = \frac{\overline{D_b X_b}}{\overline{D'_b X_b}} = \frac{\overline{D_c X_c}}{\overline{D'_c X_c}} = \lambda,$$

sunt colineare (*Mathesis* XXXIX, p. 97).

C. IONESCU-BUJOR.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREȘTI. SECȚIA INDUSTRIALĂ

Lucrare scrisă la examenul de intrare din Noembrie 1944

Geometria plană. Se dă triunghiul ABC în care

$$\overline{AC} = 2\,\overline{AB}.$$

1°. Să se arate că bisectoarea AD este perpendiculară pe mediana BE.

2°. Se inseamnă cu M mijlocul lui BC. Mediana MN în triunghiul AME este perpendiculară pe BE.

3°. Se inseamnă cu I intersecția lui AD cu BE, cu F intersecția lui CI cu AB și H intersecția lui ME cu CF. Triunghiul BIF este egal cu triunghiul IEH. Să se deducă valoarea raportului FA/FB.

4°. Să se construiască triunghiul ABC în care se cunoaște latura $AC = 2AB$ și se știe că bisectoarea AD, mediana BE și înălțimea CF sunt concurente.

Să se generalizeze pentru cazul când AB și AC sunt oare care.

Geometria în spațiu. Se dă un triunghiu dreptunghiu AOB cu catetele $OA = a$ și $OB = b$. Se construiește bisectoarea Ol a unghiului drept. Prin Ol se duce un plan P perpendicular pe planul triunghiului AOB. În acest plan P se duce prin O o dreaptă OC care să facă cu Ol un unghiu de 45°.

1°. Pe dreapte OC se ia lungimea $OC = c$. Să se afle volumul tetraedrului OABC.

2°. Cum poate fi construit punctul C astfel ca $CA = CB$.

3°. Să se arate că dacă $CA = CB$, proiecția H a punctului C pe planul AOB se află pe mediatoarea ipotenuzei AB.

4°. Punctul C fiind construit ca la 2° să se afle volumul tetraedrului OABC.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin de la section scientifique de l'Académie roumaine. București 1943. Bibliographie des travaux scientifiques parus en 1942.

Idem. 1944. Anul XXVI. Nr. 7. A. MYLLER: Suprafețe cu meridiane în un fascicol de plane. V. VÂLCOVICI: Asupra principiului lui D'ALEMBERT-LAGRANGE în un caz de legături cu frecare de alunecare.

Idem. Nr. 8. O. ONICESCU: Seriile de structuri.

Idem. Nr. 9. N. RACLIȘ: Observări asupra ultimei teoreme a lui FERMAT. M. GHERMĂNESCU: Asupra câtorva ecuații funcționale ale D-lui D. POMPEIU.

Idem. Nr. 10. S. STOILOV: Observări asupra definiției punctelor singulare ale funcțiunilor analitice multiforme.

Idem. Anul XXVII. Nr. 2. E. CARAFOLI: Influența virajului circular plan asupra proprietăților aerodinamice ale avioanelor.

Idem. Nr. 3. A. MYLLER: Suprafețele cu linii mediane geodezice. N. ABRAMESCU: Asupra cuarticelor strâmbe de prima speță. G. SUDAN: Asupra formei normale a lui CANTOR și definiția lui HESSENBERG pentru puterea numerelor ordinare. E. ARGHIRIADE: Asupra contactului unei cuartice și unei suprafețe.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XXV. Nr. 3. Mai 1945. V. ALACI: Probleme de geometrie analitică în care intervin funcțiile patratice. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate și propuse.

Idem. Anul XXV. Nr. 4. Iunie 1945. V. VÂLCOVICI: Asupra unei probleme de algebră vectorială. M. GHERMĂNESCU: Reducerea torsorilor la diade. Note matematice. Bibliografie. Probleme rezolvate și propuse.

Revista științifică „V. Adamachi". Nr. 1—2. Ianuarie-Iunie 1945. ȘTEFAN POPESCU: SIR ARTHUR EDDINGTON. I. NIȚULESCU: Pelagra, problema vindecării antipelagroasă. P. BUJOR: In amintirea lui P. PONI. C. PAPP: Materiile prime din plante. O. MARCU: Gândacii în medicina poporului Român din Bucovina. M. DAVID: Geneza, evoluția și aspecte de relief ale podișului

Transilvaniei. P. JITARIU: Coloidele în biologie. GH. NĂSTASE şi GR. IAMANDI: Mamiferele din antichitate. C. BUZDUGAN: Din efectele despădurirei, desţelenirei şi păşunatului în jud. Alba. E. PORA: Etapele izolării vieţii de mediu. N. MARCOVICI: Vârsta calcarelor la Odesa. C. C. BEDREAG: Semicentenarul Liceului Internat din Iaşi. Scurte comunicări originale. Note şi informaţiuni.

C. BUDEANU. Systèmes électromagnétiques symétriques et le système KALANTAROV. (Extr. Academie Roumaine. Bulletin de la section scientifique. Tome XXVII. No. 4. 1945.

CERERI

Răspuns la cererea Nr. 334. Vol. L. pag. 288. Se cer date asupra lui ISOPESCUL D. Pe lângă scurtele date de D-l P. SERGESCU la pag. 354 din acest volum adaug că asupra lui D. ISOPESCUL s'a publicat un articol mai desvoltat de către D-l ILIE POPA la pag. 457, Vol. XLV, *Gazeta Matematică*.

G-L GH. B.

DIVERSE

a) Redacţionale

D-l Maior E. ST. IACOB ne înştiinţează că exerciţiul Nr. 22 din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 458 şi exerciţiile 2, 7, 15 dela paginele 52, 164, 238 din acest volum propuse de D-l A. H. CUBAT sunt publicate ca probleme sau exerciţii în *Foaia Matematică* din anii 1924 şi 1925. Verificând constatăm în adevăr *complectă identitate* între exerciţiile D-lui A. H. CUBAT şi respectiv exerciţiul 7 dela pag. 157, Vol. I şi pag. 9, Vol. II, problema 145 dela pag. 112, Vol. II, problema 132 dela pag. 129, Vol. II şi problema 97 dela pag. 128, Vol. II, *Foaia Matematică*.

Pe pagina 3 a copertei *Gazeta Matematică* scrie cu litere grase că materialul ce se trimite pentru tipărit în *Gazeta Matematică* trebue să fie original, iar *nu luat* din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Cinstea cristalină a ştiinţelor matematice nu ingădue procedeul D-lui A. H. CUBAT, de aceea neputând radia exerciţiile propuse cu numele D-sale le considerăm prin aceste rânduri ca anulate.

b) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

A. KLEYER. Lehrbuch der Körperberechnung. Erstes Buch, zweite Auflage. Stuttgart 1886.

A. KLEYER. Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln. Stuttgart 1884.

Donate de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3430. *Se consideră o asteroidă (curba descrisă de un punct al unui cerc, ce se rostogolește interior pe un cerc de rază de 4 ori mai mare).*

Să se demonstreze că toate dreptunghiurile înscrise în asteroidă sunt patrate.

N. KAUFMANN.

Enunțul problemei definește asteroida ca fiind generată prin puncte. Se știe însă că asteroida se poate defini și ca curbă tangențială, ea fiind înfășurătoarea unui segment de lungime constantă ale cărui extremități se mișcă pe 2 drepte perpendiculare.

Fie Ox, Oy axele asteroidei, M un punct situat pe Ox, N un punct situat pe Oy și astfel ca $MN = a = \text{const.}$

Fie M', N' simetricele lui M, N față de O. MN și M'N' vor fi evident paralele, iar M'N' va fi tangentă la asteroidă deoarece $M'N' = a$.

Să considerăm acum un segment $M_1N_1 = a$ perpendicular pe MN (M_1 situat pe Ox, N_1 pe Oy). Fie M_1', N_1' simetricele lui M_1, N_1 față de O. M_1N_1 și $M_1'N_1'$ vor fi evident paralele, deci ambele perpendiculare pe MN și M'N', iar $M_1'N_1' = a$. Dreptele MN, M'N', M_1N_1, $M_1'N_1'$ formează deci un dreptunghiu cu laturile tangente la asteroidă.

Triunghiurile MON, M'ON', M_1ON_1 și $M_1'ON_1'$ sunt egale deoarece au ipotenuzele egale, iar unghiurile sunt și ele egale din cauza perpendicularității lui M_1N_1 și $M_1'N_1'$ pe MN și M'N'. Rezultă că înălțimile lor care pleacă din O sunt egale. Punctul O fiind egal depărtat de laturile dreptunghiului format de dreptele MN, M'N', M_1N_1, $M_1'N_1'$, dreptunghiul acesta este un patrat.

Au rezolvat problema D-nii: N. N. MIHĂILEANU și ION C. VASILIU, când erau studenți.

PROBLEMA 3823. *Să se arate că în orice triunghiu avem*

$$\frac{9}{14}p < m < \frac{5}{4}p$$

unde p *înseamnă perimetrul triunghiului, iar* m *suma medianelor.*

I. MĂRGINEANU.

Această problemă se consideră rezolvată, ea fiind propusă de acelaşi autor şi rezolvată la pag. 67, Vol. X, *Revista Matematică din Timişoara.*

Pe copertele volumului XXXV şi XXXVI sunt anunţaţi ca rezolvitori ai acestei probleme D-nii: P. I. GHIŞOIU, H. P. IONESCU, C. GH. LUPESCU, M. MARGULIUS, I. MURĂROIU, CORNELIU POPESCU şi I. C. ŞOVA.

PROBLEMA 3933. *D-l* D. V. ŞERBAN-ULMENI *a observat, examinând o tablă de cuburi, că toate grupele de trei cifre care termină un cub perfect, precedate de orice cifră, sunt terminaţiuni de patru cifre ale unui cub* (Gazeta Matematică, *anul XXXV, pag. 417*). *Să se dea o demonstraţie directă acestei proprietăţi.*

I. B. FLORESCU.

Soluţia acestei probleme este cuprinsă în nota matematică dela pag. 250, Vol. L cu titlul „*Numărul terminaţiunilor distincte ale cuburilor perfecte*" de D-l I. V. MĂTIEŞ. Problema este rezolvată şi în articolul „*Cuburi isofinale*" publicat tot de D-l I. V. MĂTIEŞ la pag. 99, Vol. XXIV, *Revista Matematică din Timişoara.*

Propunătorul problemei D-l I. B. FLORESCU a rezolvat problema arătând că dacă Q este un număr de trei cifre, terminaţie a cubului M^3, atunci plecând dela congruenţa

$$M^3 \equiv Q \qquad (\text{mod. } 10^3)$$

şi considerând o cifră *oarecare* r găsim totdeauna un număr N pentru care avem congruenţa

$$N^3 \equiv 10^3 r + Q \quad (\text{Mod. } 10^4).$$

PROBLEMA 5638. *Să se calculeze*

$$\lim_{x \to 0} \frac{[m(m+2)\sin(a+mx) - m^2 \sin[a+(m+1)x]]\sin\frac{x}{2} - 2\sin\left(a+\frac{mx}{2}\right)\sin\frac{mx}{2}\cos\frac{x}{2}}{4\sin^3\frac{x}{2}}$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU (bacalaureat liceul militar, Iaşi).

Se vede imediat că pentru $x = 0$ avem o nedeterminare $\frac{0}{0}$, deci vom aplica teorema lui HÔPITAL. Cum expresia dată e destul de complicată şi e de prevăzut repetarea aplicării regulii lui HÔPITAL, trebue simplificat pe cât e posibil calculul. Notăm cu y limita căutată şi cu $f(x)$ numărătorul fracţiei. Vom aplica teoremele privitoare la limită:

$$y = \lim \frac{f(x)}{4 \sin^3 \frac{x}{2}} = \lim \frac{f(x)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^3} \cdot \lim \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{\sin^3 \frac{x}{2}} = \lim 2 \frac{f(x)}{x^3}$$

deoarece $\lim_{\alpha = 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$. Conform teoremei lui HÔPITAL $y = \lim \frac{2f'(x)}{3x^2}$.

Dacă şi $f'(0) = 0$, atunci $y = \lim \frac{f''(x)}{3x}$, iar dacă şi $f''(0) = 0$,

$$(1) \qquad y = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} f'''(x).$$

Pentru simplificarea derivării numărătorului vom face transformările:

$$(1) \quad \sin(a + mx) \sin \frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(a + \frac{2m-1}{2} x\right) - \cos\left(a + \frac{2m+1}{2} x\right)\right].$$

$$(2) \quad \sin[a + (m+1)x] \sin \frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(a + \frac{2m+1}{2} x\right) - \cos\left(a + \frac{2m+3}{2} x\right)\right].$$

$$(3) \quad 2 \sin\left(a + \frac{mx}{2}\right) \sin \frac{mx}{2} \cos \frac{x}{2} = [\cos a - \cos(a + mx)] \cos \frac{x}{2} =$$

$$= \cos a \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos\left(a + \frac{2m-1}{2} x\right) + \cos\left(a + \frac{2m+1}{2} x\right)\right].$$

Inlocuim expresiile dela (1), (2) şi (3) la numărătorul fracţiei date şi grupăm cosinusurile cu acelaşi arc. Căpătăm astfel:

$$(4)\quad f(x)=\frac{1}{2}\left[m^2\cos\left(a+\frac{2m+3}{2}x\right)-(2m^2+2m-1)\times\right.$$

$$\left.\cos\left(a+\frac{2m+1}{2}x\right)+(m+1)^2\cos\left(a+\frac{2m-1}{2}x\right)-2\cos a\cos\frac{x}{2}\right];$$

funcţiune care se derivează uşor ori de câte ori dorim. Obţinem imediat

$$f'(x)=\frac{1}{4}\left[-m^2(2m+3)\sin\left(a+\frac{2m+3}{2}x\right)+(2m^2+2m-1)(2m+1)\right.$$

$$\left.\sin\left(a+\frac{2m+1}{2}x\right)-(m+1)^2(2m-1)\sin\left(a+\frac{2m-1}{2}x\right)+2\cos a\cos\frac{x}{2}\right]$$

$$f''(x)=\frac{1}{8}\left[-m^2(2m+3)^2\cos\left(a+\frac{2m+3}{2}x\right)+(2m^2+2m-1)(2m+1)^2\right.$$

$$\left.\cos\left(a+\frac{2m+1}{2}x\right)-(m+1)^2(2m-1)^2\cos\left(a+\frac{2m-1}{2}x\right)+2\cos a\cos\frac{x}{2}\right]$$

$$f'''(x)=\frac{1}{16}\left[m^2(2m+3)^3\sin\left(a+\frac{2m+3}{2}x\right)-(2m^2+2m-1)(2m+1)^3\right.$$

$$\left.\sin\left(a+\frac{2m+1}{2}x\right)+(m+1)^2(2m-1)^3\sin\left(a+\frac{2m-1}{2}x\right)-2\cos a\sin\frac{x}{2}\right].$$

Un calcul uşor arată că $f'(0)=f''(0)=0$. Apoi

$$f'''(0)=\frac{m^2(2m+3)^3-(2m^2+2m-1)(2m+1)^3+(m+1)^2(2m-1)^3}{16}\sin a$$

$$=\frac{m(m+1)(2m+1)}{2}\sin a.$$

Din (1) rezultă că limita căutată este $y=\frac{1}{3}f'''(0)$ adică

$$(5)\qquad y=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\sin a.$$

D-l Adrian Ionescu (elev-inginer, Timişoara), observă că expresia a cărei limită se cere aci este tocmai însumarea din problema 5602, deci făcând în acea sumă $x=0$ găseşte $y=\sin a\,(1^2+2^2+\ldots+m^2)$, adică limita (5).

D-nii: AUREL H. CUBAT (Şc. Polit., Buc.), OCTAVIAN EM. GHEORGHIU (Buc), CPT. EUG. ST. IACOB, NICOLAE V. IONESCU (cl. 8-a lic. Slatina) şi VLAD GH. JURIST (Col. „N. Filipescu", Predeal), au găsit limita *exactă* derivând numărătorul şi numitorul din enunţ, *aşa cum au fost date*. Îmi exprim admiraţia pentru această migăloasă muncă, dar eu nu m'aş fi încumetat să pornesc astfel!

Obs. Problema de faţă constitue de fapt o *verificare* a problemei 5602 şi de aceea e preferabilă soluţia directă a D-lui P. P. DRĂGHICESGU.

G. D. S.

PROBLEMA 5798. *Să se rezolve ecuaţia*

$$\sin^2 a + \sin^2 (a + x) + \sin^2 (a + 2x) + \sin^2 (a + 3x) = 2.$$

GH. D. SIMIONESCU.

Soluţie dată de D-nii: MARCEL D. COTARIU (Brăila), ADRIAN I. POPESCU (elev-inginer, Timişoara), GEORGE M. NICOLAE (Colegiul Naţional „Carol I", Craiova), EUGEN N. WEGENER (Bucureşti), VLAD GH. JURIST (clasa VIII-a Colegiul Naţional „N. Filipescu", (Predeal), DUMITRU GH. VASILIU (clasa VIII-a liceul militar, Iaşi) şi GR. NADOLU.

Deoarece $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ avem:

$$1 - \cos 2a + 1 - \cos 2(a + x) + 1 - \cos 2(a + 2x) + 1 - \cos 2(a + 3x) = 4$$

$$\therefore \cos 2a + \cos 2(a + x) + \cos 2(a + 2x) + \cos 2(a + 3x) = 0.$$

Grupăm primul termen cu ultimul, apoi pe cei dela mijloc şi transformăm sumele în produse:

$$2\cos(2a + 3x)\cos 3x + 2\cos(2a + 3x)\cos x = 0.$$

Scoatem pe $\cos(2a + 3x)$ factor şi trasformăm suma $(\cos 3x + \cos x)$ în produs. Ecuaţia dată devine

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos(2a + 3x) = 0$$

şi se desface în

(I) $\cos x = 0$; (II) $\cos 2x = 0$; (III) $\cos(2a + 3x) = 0$.

Soluţiile corespunzătoare sunt:

$$(I')\ x = k\pi + \frac{\pi}{2};\quad (II')\ x = k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4};\quad (III')\ x = \frac{(2k+1)\pi}{6} - \frac{2a}{3}.$$

D-nii: AUREL H. CUBAT şi P. P. DRĂGHICESCU au pornit dela formula generală de însumare a cosinusurilor cu arcele în progresie aritmetică.

Soluţii cu mici greşeli s'au primit dela D-nii: PETRE D. COLUMBEANU şi MARINEL MARINESCU (Colegiul Naţionnl „N. Filipescu").

Nu menţionăm o soluţie în care se dau numai arcele din primul cadran.

* * *

Generalizare dată de D-l MARCEL COTARIU. Ecuaţia:

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{n-1} \sin^2(a + ix) = \frac{n}{2}$$

se rezolvă în acelaşi fel. Ea se reduce la

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{n-1} \cos(2a + 2ix) = 0.$$

In formula generală de însumare:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos(\alpha + ih) = \frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

punem $\alpha = 2a$ şi $h = 2x$ şi ecuaţia (1) devine:

$$(3)\qquad \frac{\sin nx\ \cos[2a + (n-1)x]}{\sin x} = 0.$$

Numărătorul se anulează pentru:

$$a)\qquad \sin nx = 0\ \therefore\ x = k\frac{\pi}{n}\quad \text{şi}$$

$$b)\qquad \cos[2a + (n-1)x] = 0\ \therefore\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2(n-1)} - \frac{2a}{n-1}.$$

Insă din cauza numitorului va trebui *să îndepărtăm soluţiile corespunzătoare lui* $\sin x = 0$, *adică* $x = k'\pi$, aşa că soluţiile dela (a) sunt $x = k\frac{\pi}{n}$ (fără $x = k'\pi$).

Observaţiuni. 1°. Ecuaţia

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos^2(a + ix) = \frac{n}{2}$$

are aceleaşi soluţii ca şi ecuaţia (1). (M. COTARIU şi ADRIAN I. POPESCU).

2°. Unii corespondenţi s'au folosit şi de articolul D-lui ADRIAN I. POPESCU (G. M., XLVIII, pag. 247) ajungând la aceleaşi rezultate.

PROBLEMA 5800. *Care sunt numerele de trei cifre descompozabile în trei factori primi absoluţi sau trei factori coprimi?*

I. IONESCU.

Soluţie, dată de D-l GH. GH. VRÂNCEANU (Liceul militar, Târgul Mureş).

Fie $a<b<c$ trei numere prime obsolute aşa în cât produsul lor

$$p = a \times b \times c$$

să aibă numai trei cifre, adică $100 \leqslant p \leqslant 999$. Numerele prime pe care le putem folosi sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 78, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 153 şi 163, căci dacă luăm pe cele mai mici 2 şi 3 avem

$$2 \times 3 \times 17 = 102 > 100 \quad \text{şi} \quad 2 \times 3 \times 163 = 978 < 999$$

Facem următorul tabel în care dăm lui a pe rând valorile 2, 3, 5... lui b pe rând valorile 3, 5, 7 ... şi lui c celelalte valori şi în care înscriem numărul n de soluţii şi valorile lui p.

a	b	$\leqslant c \leqslant$	n	p
2	3	17—163	32	102, 104, 135, 174, 186, 222, 246, 258, 282, 318, 356, 396, 402, 426, 438, 474, 498, 534, 582, 606, 618, 642, 654, 678, 762, 786, 822, 834, 896, 906, 942, 978.
2	5	11—97	21	110, 130, 170, 190, 230, 290, 310, 370, 410, 430, 530, 610, 670, 710, 737, 790, 830, 890, 970.
2	7	11—71	16	154, 187, 238, 266, 322, 406, 434, 518, 574, 602, 694, 742, 826, 894, 938, 994.
2	11	13—43	9	286, 374, 418, 508, 638, 682, 814, 902, 946.
2	13	17—37	6	449, 494, 598, 754, 806, 962.
2	17	19—23	3	646, 782, 966.
2	19	23	1	874.

a	b	$\leqslant c \leqslant$	n	p
3	5	7—61	15	105, 165, 195, 255, 295, 345, 435, 465, 555, 615, 695, 705, 795, 885, 915.
3	7	11—47	11	231, 273, 387, 399, 489, 606, 651, 734, 861, 963, 987,
3	11	13—29	5	489, 561, 626, 754, 987.
3	13	17—23	3	663, 741, 797.
3	17	19	1	964.
5	7	11—23	5	385, 455, 595, 665, 865.
5	11	13—17	2	715, 935.
Total . . .			130	soluţii în cazul numerelor prime absolute.

Să trecem la cazul numerelor coprime. Obţinem asemenea soluţii din cele precedente ridicând unul din factorii a, b, c la diferite puteri cu condiţia ca $100 \leqslant p \leqslant 999$ şi obţinem următorul tabel de soluţii.

Tipul	$< c <$	n	p
$2^2.3.c$	11—83	19	132, 186, 204, 228, 276, 348, 372, 448, 492, 516, 564, 636, 708, 732, 804, 852, 876, 948, 996.
$2^2.5.c$	7—47	12	140, 220, 240, 340, 380, 460, 580, 620, 740, 820, 860, 940,
$2^2.7.c$	11—31	7	308, 364, 476, 532, 644, 812, 864.
$2^2.11.c$	13—19	3	572, 768, 836.
$2^2.13.c$	17—19	2	884, 998.
$2^3.3.c$	5—41	11	120, 168, 264, 312, 408, 456, 552, 696, 744, 888, 984.
$2^3.5.c$	7—23	6	280, 440, 920, 680, 760, 920.
$2^3.7.c$	11—17	3	616, 720, 752.
$2^4.3.c$	5—19	6	240, 336, 528, 624, 814, 912.
$2^4.5.c$	7—11	2	560, 880.
$2^5.3.c$	5— 7	2	480, 672.
$2^6.3.c$	5	1	960.
$2.3^2.c$	7—13	12	126, 198, 234, 306, 342, 414, 522, 558, 666, 724, 846, 954.
$3^2.5.c$	7—19	5	415, 495, 585, 765, 855.
$3^2.7.c$	11—13	2	696, 819.
$2.3^3.c$	5—17	5	270, 378, 594, 702, 918.
$2^3.5.c$	7	1	945.
$2.3^4.c$	5	1	810.
$2.5^2.c$	3—19	7	150, 250, 350, 550, 650, 850, 950.
$3^2.5.c$	7—13	3	525, 825, 975.
$2.7^2.c$	3— 5	2	294, 490.
$3.7^2.c$	5	1	735.
$2.3.c^2$	11	1	726.
Total . . .		114	soluţii cu numere coprime.

Alte soluții se obțin ridicând 2 sau 3 factori primi absoluți la diferite puteri tot cu condiția $100 \leqslant p \leqslant 999$. Iată totalul corespunzător:

Tipul	$< c <$	n	p
$2^2.3^2.c$	5—23	7	180, 212, 396, 468, 612, 694, 818.
$2^2.5^2.c$	3— 7	2	300, 700.
$2^3.3^2.c^2$	5	1	900.
$2^3.3^2.c$	5— 3	4	360, 504, 792, 936.
$2^3.3.c^2$	5	1	600.
$2^4.3^2.c$	5	1	720.
Total . . .	16 soluții.		

O altă clasă de numere coprime se formează astfel. Fie a, b, c, d patru factori primi absoluți și

$$100 \leqslant p = a \times b \times c \times d \leqslant 999.$$

Luând 2 din acești factori și-i înmulțim, iar pe ceilalți îi lăsăm liberi. Din o grupă a, b, c, d facem $C_4^2 = 6$ numere coprime care corespund problemei. Așa din $2 \times 3 \times 5 \times 7$ facem

$$(2 \times 3) \times 5 \times 7 = (2 \times 7) \times 3 \times 5 = (2 \times 5) \times 3 \times 7$$
$$= (3 \times 5) \times 2 \times 7 = (5 \times 7) \times 2 \times 3 = 210.$$

Tabloul următor dă toate soluțiile din această categorie.

a	b	c	d	p	a	b	c	d	p
2	3	5	7	210	2	3	11	13	858
2	3	5	11	330	2	5	7	11	770
2	3	5	13	380	2	3	7	23	966
2	3	5	17	510	2	5	7	13	910
2	3	5	19	570	2^2	3	5	7	420
2	3	5	23	690	2^2	3	5	11	660
2	3	5	29	870	2^2	3	5	13	780
2	3	5	31	940	2	3^2	5	7	630
2	3	7	11	462	2	3^2	5	11	990
2	3	7	13	546	2^2	3	7	11	924
2	3	7	17	714	2^3	3	5	7	840
2	3	7	19	798					
Total . . .	$21 \times 6 = 126$ soluții.								

Numărul total de soluții este deci 256.

PROBLEMA 5906. *Să se găsească un cub perfect, care începe cu rădăcina sa cubică.*

M. GHERMĂNESCU.

Fie N rădăcina cubică de α cifre, iar $\alpha + \beta$ numărul cifrelor cubului căutat N^3, avem:

$$N^3 = 10^\beta N + M \quad , \quad M = N(N^2 - 10^\beta) < 10^\beta,$$

astfel că o primă condiție este

$$(1) \qquad N \geqslant 10^{\frac{\beta}{2}} \quad , \quad \alpha < \beta < 2\alpha,$$

iar a doua se deduce din $M < 10^\beta$, adică

$$(2) \qquad f(N) = N^3 - 10^\beta N - 10^\beta < 0.$$

Fie N_1 cea mai mică valoare a lui N pentru care $f(N) > 0$; se observă că $f(N_1 + h) > 0$, $h > 0$, așa că (2) va fi satisfăcută pentru $N < N_1$. Observăm atunci că N_1 este tocmai limita superioară a rădăcinilor pozitive ale ecuației $f(N) = 0$, care este definită tocmai prin condiția $f(N_1 + h) > 0$, oricare ar fi $h > 0$. Folosind metoda lui LANGRANGE [1]), vom avea

$$(3) \qquad 10^{\frac{\beta}{2}} \leqslant N < 1 + 10^{\frac{\beta}{2}},$$

așa că problema are o singură soluție sau niciuna, de fiecare valoare a lui β.

Dacă β este *par*, $\beta = 2m$, (3) devine

$$10^m \leqslant N < 1 + 10^m$$

și este evident că $N = 10^m$ constitue o soluție a problemei, soluție banală după aprecierea noastră.

Dacă β este *impar*, $\beta = 2m + 1$, este posibil să găsim o soluție nebanală pentru anumite valori ale lui m.

Astfel, pentru $m = 1$, deci $\beta = 3$, avem

$$31, \ldots < N < 1 + 31, \ldots$$

deci $N = 32$, care este efectiv, o soluție a problemei, căci

$$32^3 = 32.768.$$

Nu știm dacă se mai află alta. Am obținut rezultat negativ pentru $\beta = 1, 5, 7, 9$.

---

1) M. GHERMĂNESCU, *Curs de Algebră superioară*, p. 372.

Notă. Şapte corespondenţi au indicat soluţia 32^3, dar mijloacele întrebuinţate spre a o găsi ne împiedecă de a le da numele.

M. G.

PROBLEMA 5916. *Dacă într'un triunghiu avem relaţia*

$$\frac{r_c(a+b)+r_b(a-b)}{r_c(a+b)-r_b(a-b)} \times \frac{r_b(a+c)-r_c(a-c)}{r_b(a+c)+r_c(a+c)} = \frac{c}{b}$$

triunghiul este isoscel sau are $\sphericalangle A = 60^0$.

MARCEL D. COTARIU.

Soluţie, dată de D-nii: MIHAI R. CONSTANTINESCU (Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploeşti); CR. I. CANTUNIAR (Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti); P. D. COLUMBEANU (Colegiul Naţional „M. Filipescu", Predeal); S-LT. C. PANTELIMON (Artileria antiaeriană, Ploeşti); E. N. WEGENER (Bucureşti); ILIE N. CONSTANTINESCU (Liceul „N. Bălcescu", Brăila); P. P. DRĂGHICESCU (student Inginer); AL. IEŞAN (Liceul „Matei Basarab", Bucureşti); CONST. C. DIACONU (Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti); GHEORGHE A GRIGORE; M. D. PETCULESCU (student Inginer, Bucureşti), B. I. POPESCU (Lic. Militar, Timişoara), E. MARINESCU (Lic. „Aurel Vlaicu", Bucureşti) şi G. M. NICOLAE.

Inlocuim în enunţ pe r_b, r_c respectiv prin

$$\frac{S}{p-b} \quad \text{şi} \quad \frac{S}{p-c}$$

şi obţinem după facerea tuturor calculelor şi reducerilor

$$(1) \quad \frac{a(2p-b-c)+bc-b^2}{b(2p-a-b-c)+ac} \times \frac{c(2p-a-b-c)+ab}{a(2p-b-c)+bc-c^2} = \frac{c}{b}.$$

Dar $2p = a+b+c$, deci (1) devine

$$\frac{a^2+bc-b^2}{a^2+bc-c^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\therefore \quad (b-c)(b+c)(a^2-b^2-c^2+bc) = 0.$$

Care atrage după sine relaţiile

(1) $b = c$, deci triunghiu isoscel, sau

(2) $$a^2-b^2-c^2+bc-0.$$

Se ştie că $$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos A.$$

Comparând cu (2) se vede că

$$\cos A = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \sphericalangle A = 60^0.$$

(3) $b + c = 0$, care nu este posibilă pentru un triunghiu.

Notă. 1°. D-l S-LT. M. AL. VASILESCU-STABU, efectuând calculele în relaţia din enunţ ajunge la

$$a^2 b\left(r_b^2 - r_c^2\right) - b^2 c\left(r_b^2 - r_c^2\right) - ab^2\left(r_b - r_c\right)^2 + ca^2\left(r_b^2 - r_c^2\right) - bc^2\left(r_b^2 - r_c^2\right) + ac^2\left(r_b - r_c\right)^2 = 0$$

$$\therefore \quad r_b = r_c \quad \text{şi deci} \quad \sphericalangle B = \sphericalangle C$$

şi $$\left(r_b + r_c\right)\left(a^2 b - b^2 c - bc^2 + a^2 c\right) = \left(r_b - r_c\right) a\left(b^2 - c^2\right).$$

Aici se înlocueşte r_b şi r_c în funcţie de laturi şi se ajunge la a doua concluzie.

2°. D-l M. SP. MANOLIU (Liceul „Codreanu", Bârlad), a rezolvat bine problema, folosind şi proprietăţile rapoartelor egale.

3°. D-l MIRCEA I. PĂTRĂŞCIOIU (Liceul Buzău) a dat o soluţie bună folosind relaţii trigonometrice.

4°. D-l GH. A. BRAŞOVEANU a verificat *numai* reciproca proprietăţii arătând că dacă $b = c$ sau dacă $\sphericalangle A = 60^0$ relaţia din enunţ este adevărată.

GH. B.

PROBLEMA 5959. *In triunghiul* ABC, *circumscris cercului de centru* I *fie* α, β, γ *picioarele bisectoarelor şi* M, N *intersecţiile dreptei* $\beta\gamma$ *cu* AI, *respectiv perpendiculara din* I *pe* AI. NI *taie pe* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ *în* γ', β'; $M\beta'$, $M\gamma'$ *taie pe* AB, AC *în* γ'', β''. *Să se arate că punctele* β'', α'', γ'', N *sunt aşezate toate pe o tangentă a cercului* I.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie. 1. Triunghiurile $\beta' M\gamma'$, γAB sunt omologice având vârfurile (B', γ), (M, A), (γ', β) pe drepte concurente în α. Laturile omoloage se taie deci în trei puncte colineare (DESARGUES): γ'', β'', N.

2. Fie P intersecţia $(M\beta', \gamma I)$ şi Q intersecţia $(M\beta', N\alpha)$. In patrulaterul complet $NM\alpha\beta' I\gamma$ avem (PAPPUS):

$$(PQM\beta') = -1.$$

De asemenea în patrulaterul $BACI\gamma B$

$$(M\alpha AI) = -1.$$

Dar fascicolul $(\gamma\alpha, \gamma C, \gamma\beta, \gamma A)$ tăiat de transversalele αA, $M\gamma''$ ne dă

$$\gamma(M\alpha AI) = \gamma(M\beta'\gamma'' P)$$

deci $(M\beta'\gamma'' P) = -1$ sau $(P\gamma'' M\beta') = -1$; comparând cu primul raport armonic rezultă $Q \equiv \gamma''$ deci punctele α'', β'', γ'', N sunt colineare.

3. Fie R intersecția $(\beta\gamma, BC)$; se știe că AR este bisectoarea exterioară din A deci perpendiculară pe AI. Din asemănarea triunghiurilor NMI și MAR cum și din faptul că punctele I, A sunt conjugate armonic cu α, M rezultă:

$$\frac{NI}{AR} = \frac{MI}{MA} = \frac{\alpha I}{\alpha A}$$

deci triunghiurile $NI\alpha$, αAR sunt asemenea și unghiurile $N\alpha I$, $I\alpha R$ egale și cum αR este o tangentă a cercului de centru I, αN va fi a doua.

SUBLOCOT. CONSTANTIN PANTELIMON
(Artileria antiaeriană, Ploești).

Observație. 1. Dacă transformăm figura într'o inversiune de cerc principal I, obținem următorul enunț:

Fie ABC *un triunghiu înscris în cercul* O. *Paralelele prin vârfuri la laturile opuse formează triunghiul* A'B'C'. *Fie* B'', C'' *proiecțiile punctelor* B', C' *pe paralela din* A' *pe* BC. *Dreptele* B'C', C''B, B''C *și perpendiculara din* A' *pe* BC *sunt toate concurente într'un punct al cercului* O.

Ori aceasta se dovedește ușor. Fie S punctul unde paralela din A la BC taie cercul circumscris și A'' intersecția (SA', BC). Triunghiurile SCA'', A''CA' sunt egale având unghiul din C și laturile din jurul lui egale deci și unghiurile din A'' sunt egale, deci drepte. Apoi B este centrul dreptunghiului SC'C''A', căci este în mijlocul diagonalei C'A', etc.

2. Proprietatea că punctele β'', γ'' sunt pe tangentă a cercului (I) este cuprinsă în problema 5137 [G. M., XLIX—311], ca un caz particular. De asemenea este cuprinsă acolo și proprietatea că $N\alpha$ este tangentă cercului, când M al problemei 5137 este luat în punctul N al problemei 5959.

PROBLEMA 6029. *Fie* ABCDA'B'C'D' *o prismă dreaptă cu baza un patrulater inscriptibil. Dacă* $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, *să se demonstreze relațiile:*

a) $(aria\,ABB'A')^2 - (aria\,CDD'C')^2 = (aria\,ABB'A' \cdot aria\,ADD'A' + aria\,BCC'B' \cdot aria\,CDD'C')\cos\alpha + (aria\,ABB'A' \cdot aria\,BCC'B' + aria\,ADD'A' \cdot aria\,CDD'C')\cos\beta$;

b) $(aria\,ADD'A')^2 - (aria\,BCC'B')^2 = (aria\,ABB'A' \cdot aria\,ADD'A' + aria\,BCC'B' \cdot aria\,CDC'C')\cos\alpha - (aria\,ABB'A' \cdot aria\,BCC'B' + aria\,ADD'A' \cdot aria\,CDD'C')\cos\beta$.

VIRGIL GHIȚESCU.

Soluție dată de D-nii: M. A. BARBAIANI, P. D. COLUMBEANU, M. R. CONSTANTINESCU, MARCEL COTARIU, C. C. DIACONU, I. E. HARGHEL, M. AL. LEON, EMIL MĂRINESCU și MIRCEA PETCULESCU.

Exprimând valoarea lui $\overline{BD}$ în ambele triunghiuri, ABC și BCD și egalând rezultatele obținute, vom avea:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\alpha = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2\,\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cos\alpha$$

$$(1)\quad \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 2\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)\cos\alpha.$$

De asemenea, prin exprimarea lui $\overline{AC}$ din ambele triunghiuri, ABC și ADC și prin egalarea rezultatelor se va găsi:

$$\overline{AB} + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos\beta = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + 2\,\overline{CD}\cdot\overline{AD}\cos\beta$$

$$(1')\quad \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2 = 2\left(\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{AD}\cdot\overline{CD}\right)\cos\beta.$$

Să adunăm parte cu parte relațiunile (1) și (1') și să simplificăm rezultatul găsit cu 2 și vom obține:

$$(2)\quad \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2 = \left(\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)\cos\alpha + \left(\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{AD}\cdot\overline{CD}\right)\cos\beta.$$

Fie h lungimea comună a muchilor laterale ale prismei. Să înmulțim relațiunea (2) cu h^2. Ținând seama de valoarea ariei unui dreptunghiu, va rezulta tocmai relațiunea de demonstrat *a)*.

Să scădem apoi relațiunile (1) și (1') și să simplificăm rezultatul. Reiese astfel:

$$(2')\quad \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = \left(\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{BC}\cdot\overline{CD}\right)\cos\alpha - \left(AB\cdot BC + AD\cdot CD\right)\cos\beta.$$

Înmulțind cu h^2 relațiunea precedentă, va reieși relațiunea de demonstrat *b)*.

V. GH.

EXERCIȚII

34. *Știind că* a, b, c, p *sunt laturile și perimetrul unui triunghiu să se deducă ce reprezintă* x, y, z *din relațiunile*

$$[pc^2\,(p-c)]^z = [(p-a)\,(p-b)z]^{x+y}$$

$$xy = p\,(p-c)\quad ;\quad x+y=z$$

să se arate că

$$\sum a^x\left[ya^z + za^y(b^x + c^x) - x\,(b^z + c^z)\right] = y\,(a^x + b^x + c^x)\,(a^z + b^z + c^z)$$

M. R. CONSTANTINESCU.

R. Din prima şi ultima ecuaţie se scoate

$$z = \frac{c\sqrt{p\,(p-c)}}{\sqrt{(p-a)\,(p-b)}} = \frac{c\,S}{(p-a)\,(p-b)}$$

S fiind suprafaţa triunghiului. Cunoscând suma $x+y$ şi produsul xy se deduce

$$x = \frac{S}{p-a} \quad \text{şi} \quad y = \frac{S}{p-b}.$$

Ultima egalitate a enunţului este evidentă dacă după desvoltare se înlocueşte $x+y$ prin z.

Această egalitate are loc orice-ar reprezenta literele a, b, c în condiţia

$$x+y=z.$$

35. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(Aa^2+Baa'+Ca'^2)\,x^4+(2\,Aab+2\,Ca'b'+Bab'+Bba')\,x^3$$
$$+(Ab^2+Aac+Cb'^2+2\,Ca'c'+Bac'+Bca')\,x^2$$
$$+(2\,Abc+2\,Cb'c'+Bbc'+Bcb')\,x+(Ac^2+Bcc'+Cc'^2)=0.$$

M. D. COTARIU.

R. Desfăcând parantezele şi grupând termenii se obţine

$$A\,(ax^2+bx+c)^2+B\,(ax^2+bx+c)\,(a'x^2+b'x+c')$$
$$+C\,(a'x^2+b'x+c')=0.$$

Facem substituţia

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

şi găsim că ecuaţia se reduce la

$$Ay^2+By+C=0$$

a cărei rezolvare este imediată.

36. *Să se calculeze derivata expresiei:*

$$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}.$$

numărul radicalilor fiind n.

† T. STOICESCU.

R. Dacă notăm $y_1=\sqrt{x}$, $y_2=\sqrt{x+\sqrt{x}}$, $y_3=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, şi aşa mai departe, găsim:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+2y_1+2^2y_1y_2+2^3y_1y_2y_3+\ldots+2^{n-1}y_1y_2y_3\ldots y_{n-1}}{2^n\,y_1\cdot y_2\cdot y_3\ldots y_n}.$$

37. *Să se demonstreze că*

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, C_n^i = n2^{n-1}$$ [1])

C_n^i *fiind simbolul combinărilor.*

E. N. WEGENER.

R. Derivând ambii membrii ai desvoltării lui $(x+1)^n$ se obține:

$$n\,(x+1)^{n-1} = nx^{n-1} + (n-1)\, C_n^1 x^{x-2} + \ldots + C_n^{n-1}.$$

In această identitate înlocuind pe x prin 1 se obține identitatea din enunț.

PROBLEME PROPUSE

6120. Să se găsească ultimele 9 cifre ale unui număr al cărui patrat se termină cu numărul 797613929.

V. THÉBAULT.

6121. Loteria Română de Stat a introdus, cu începere din luna Februarie 1945, jocul numit *loto săptămânal* care constă în următoarele:

Loteria pune într'o urnă 90 de bile numerotate dela 1 la 90 inclusiv și trage la sfârșitul săptămânii 5 bile la întâmplare.

Jucătorul cumpără în cursul săptămânii care precede tragerea un grup de 3 numere la alegerea lui. Dacă în grupul de 5 numere pe care le scoate loteria din urnă se găsesc toate cele 3 numere cumpărate de jucător, indiferent de ordine, jucătorul a câștigat.

Cu începere dela 1 Mai, loteria a dublat prețul de 100 lei al unei grupe de 3 numere, în schimb scoate din urnă 7 numere în loc de 5, sporind astfel șansele jucătorilor.

---

1) A se vedea analog exercițiul Nr. 25 dela pag. 302, Vol. L.

Din încasările dela jucători, loteria opreşte 40% , iar 60% se distribue jucătorilor. Se întreabă: 1°. Dacă dublarea preţului a 3 numere este echitabilă faţă de mărirea şansei prin scoaterea a 7 bilete din urnă; 2°. Presupunând că joacă 400.000 de jucători la o tragere, care este câştigul maxim pe care l-ar putea avea un jucător; 3°. Care este probabilitatea să nu câştige niciun jucător; 4°. Un jucător care a cumpărat 5 grupe de câte 3 numere, ce şansă are să câştige la 2 tragerei consecutive?

G-L GH. BUICLIU.

6122. In unghiul XOY de mărime 2α, se înscrie un cerc C de rază R.

Se cere să se înscrie în unghiul XOY, un alt cerc care să taie cercul C după un unghiu dat β. Discuţie.

CPT. AURELIAN I. STAN.

6123. Triunghiul ABC are latura BC situată într'un plan orizontal. Laturile AC şi AB se rotesc în acelaşi sens şi cu acelaşi unghiu, în jurul unor verticale ce trec respectiv prin C şi B. Se cere să se calculeze, pe cale geometrică:

1°. Lungimea perpendicularei comune dreptelor AC şi AB, astfel rotite.

2°. Distanţa unuia din vârfurile C sau B la picioarele acestei perpendiculare.

ŞT. S. MIHĂIESCU.

6124. Să se rezolve sistemul

$$x + yz = a \quad , \quad y + zx = b \quad , \quad z + xy = c.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

6125. Să se demonstreze că dacă

$$S_1^4 = \sin^4 a + \sin^4 (a + r) + \ldots + \sin^4 [a + (n-1)\, r]$$

$$S_2 = \cos 4a + \cos 4 (a + r) + \ldots + \cos 4 [a + (n-1)\, r]$$

$$S_3 = \cos 2a + \cos 2 (a + r) + \ldots + \cos 2 [a + (n-1)\, r],$$

atunci

$$8\, S_1^4 = S_2 - 4\, S_3 + 3n.$$

AD. I. POPESCU.

6126. Intre generatoarele rectilinii de acelaşi sistem, ale cuadricei (Q) se stabileşte o corespondenţă involutivă (I). Să se arate că:

1°. Perpendicularele comune ale perechilor, astfel definite, de generatoare sunt paralele cu acelaşi plan P.

2°. Planul P este perpendicular pe planurile asimptotice ale cuadricei (Q) relative la generatoarele duble ale involuţiei (I).

ŞERBAN GHEORGHIU.

6127. x fiind un număr real, se pune

$$sgx = -1,\ 0 \text{ resp. } 1,$$

după cum

$$x <,\ = \text{resp.} > 0.$$

Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a expresiunei

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{(k)}(-1)^{k-1}\, sg\,(x_{i_1}+x_{i_2}+\ldots+x_{i_k})\right)$$

$\sum_{(k)}$ referindu-se la toate combinările $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ale numerelor $1, 2, \ldots n$.

TIBERIU POPOVICIU.

6128. Echinoxul de vară, $\delta_\odot = +23°27'$. Pentru care puncte de pe pământ intervalul de timp dintre răsăritul şi apusul soarelui este:

a) $^1/_3$ din ziua solară adevărată;

b) $^2/_3$ „ „ „ „

$\delta_\odot$ se presupune constantă.

Zi solară adevărată este intervalul de timp scurs între 2 treceri succesive a soarelui adevărat la acelaşi meridian.

CPT. C. V. COSTĂCHESCU.

ERATĂ. La finele soluţiei problemei 5827, la pag. 362 din acest volum, trebue adăugată condiţia

$$2 + \alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \beta + \beta_1 + \ldots + \beta_n = k$$

cu care $\varphi(N) = 10^k$.

M. G.

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbu I. A. (6016); *Bârzescu M.* (6090); *Columbeanu D. P.* (6077, 88, 89, 105); *Goldiş T. Gh.* (6084, 89, E); *Harghel E. I.* (6011, 12, 29, 45, 48, 61, 69, 78); *Iacob St. E.* Maior (5279); *Leon A. M.* (5798, 887, 926, 6067, 112); *Mărcuţiu P. Irina* (6011, 43, 87); *Popa C. Marcel* (E); *Răuţu C. Titus* (6092); *Şaichin O. A.* (6100); *Soare V. M.* (6086, 92); *Teodorescu St. I.* (5931); *Vargă I. A.* (6100, 17); *Vlăsie M. Gh.* (6092); *Vrânceanu Gh. Gh.* (2290, 4634, 793, 5944, 70, 71, 6084, 85, 86, 87, 88, 89, 92, 96, 101); *Wegener N. E.* (5701, 810, 999, 6117, N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XVI şi XVII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XVIII. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gabriela Ţiţeica* . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 400

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . Lei 600

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 33.280.

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL L

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1945

SUMARUL

1. Al treilea congres al matematicienilor Români . . . . . *Comitetul de inițiativă.*
2. Asupra unor paralelograme înscrise într'un paralelogram dat . . . . . *A. Dobrescu.*
3. Discuția și separarea rădăcinilor ecuațiilor pseudo-reciproce . . . . . *I. V. Mătieș.*
4. Raportul pentru decernarea premiului „Spiru-Haret“ . . . . . *Comisiunea pentru premii.*
5. **Note matematice:** 44—48.
6. Chestiuni de examen.
7. **Bibliografie.**
8. Cereri: 336.
9. Diverse.
10. **Probleme rezolvate:** 3874, 4745, 5099, 5279, 5793, 5920, 6046, 6060, 6062, 6089.
11. **Exerciții:** 38.
12. **Probleme propuse:** 6129 — 6137.
13. Tabla de materii.

ABONAMENTUL 1.000 LEI PE AN

B :TI

MONITORUL OFICIA IMERI

IMPRIME NA

1945

SPRE ŞTIINŢA

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membrii compusă din D-nii: **Şerban A. Gheorghiu**, Doctor în Matematici; Profesor **Petre Sergescu**; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela *«Gazeta Matematică»* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Nu se primesc articole, note, cereri, exerciţii, recreaţii, probleme rezolvate şi propuse decât dela abonaţii *Gazetei Matematice*.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evita confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate sau nepublicate.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate până în Sept. 1944 sunt indicate în tabla de materii a volumului XLIX.

Problemele propuse nerezolvate sau nepublicate în anul curent, sunt următoarele: **60**06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, **1**00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XLIV cu No. 585 — 5179, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se trimite gratuit, la cerere, abonaţilor elevi în cl. VII, VIII şi studenţilor.

EXTRASE. — Pentru extrase, domnii autori se vor adresa direct *Imprimeriei Naţionale*, Calea Şerban Vodă, 133.

La *«Gazeta Matematică»* se găseşte:

Regulamentul premiilor şi burselor Societăţii „Gazeta Matematică". Lei 60

A. ANGELESCU, *Lecţiuni de calcul diferenţial*. . . . . „ 400

AL TREILEA CONGRES AL MATEMATICIENILOR ROMÂNI

Societatea *„Gazeta Matematică“* va sărbători la 27 şi 28 Octombrie 1945 *cincizeci de ani* de apariţie neîntreruptă a revistei *„Gazeta Matematică“*. Cu acest prilej se vor aduna în Bucureşti peste o sută de profesori de matematici şi ingineri, membri ai societăţii.

Socotim că această împrejurare poate fi potrivită pentru a organiza *al treilea congres al matematicienilor Români.* Congresul urmează să aibă loc în Bucureşti dela 29 Octombrie la 1 Noembrie 1945 şi să se termine la 2 şi 3 Noembrie la Cluj.

Domnul Ministru al Educaţiei Naţionale a primit să fie Preşedinte de onoare al acestui Congres.

Lucrările congresului se vor împărţi în trei secţiuni:

a) Matematici pure; *b)* Matematici elementare şi învăţământ; *c)* Matematici aplicate.

Comunicările din secţiunea *a* se vor publica ulterior în volumul XXIII al revistei *Matematica.* In secţiunea *b* se va discuta pe larg şi, eventual, elabora un proiect de program analitic al învăţământului matematicei în şcolile secundare. Secţia *c* va conţine comunicări privitoare la aplicaţiile matematicei la tehnică, ştiinţele fizice şi biologice, ştiinţele militare, etc.

In acelaşi timp va avea loc în Bucureşti, organizată de *Gazeta Matematică*, o *Expoziţie a Cărţii Româneşti de Matematică.*

Pentru participanţii din provincie la congres se poate asigura găzduirea şi, eventual masa, la Căminul Politehnicei.

Cotizaţia pentru participarea la congres este de 1.000 lei destinaţi acoperirii cheltuelilor de organizare şi tipăririi programului care se va distribui congresiştilor.

Având în vedere marile greutăţi actuale, trebue să ştim din vreme numărul cât mai exact al participanţilor.

De aceea, rugăm pe toţi acei cari doresc să ia parte la congres să comunice, *până la 15 Septembrie 1945,* pe adresa PROF. P. SERGESCU, Calea Plevnei Nr. 56 Bucureşti, următoarele date:

1. Numele, pronumele, calitatea şi adresa.
2. Secţiunea la care vrea să ia parte.

3. Titlul comunicărilor pe care ar vrea să le facă; de asemeni, dacă doreşte să ia parte la discuţie asupra programei analitice a învăţământului secundar (matematici).

4. Dacă doreşte sau nu să fie găzduit la Căminul Politehnicii.

5. Dacă doreşte să ia parte la excursiunea la Cluj.

Comitetul va hotărî la 15 Septembrie şi va comunica imediat celor înscrişi dacă numărul de înscrieri şi greutăţile de organizare vor îngădui sau nu ţinerea congresului.

In cazul afirmativ, persoanele care vor dori să fie înscrise în mod definitiv ca participanţi, sunt rugate să trimeată, între 10 Septembrie şi 26 Octombrie, cotizaţia pentru congres. Acei cari doresc să facă comunicări sunt rugaţi să trimeată, între 10 Septembrie şi 15 Octombrie, titlul definitiv al comunicării şi un rezumat de maximum zece rânduri, care se va publica în programul congresului.

Toată corespondenţa se va adresa D-lui P. SERGESCU.

Se vor face intervenţii ca profesorii secundari să poată lipsi dela catedră pentru a participa la congres.

Comitetul de iniţiativă:

Preşedinte, Profesor D. POMPEIU.

Membri:

N. ABRAMESCU
Profesor Universitatea Cluj

TH. ANGHELUŢĂ
Profesor Universitatea Cluj

N. CIORĂNESCU
Rectorul Politehnicei Bucureşti

AL. GHIKA
Preşedintele Soc. Române de Matematică

MIRON NICOLESCU
Secretarul General al Ministerului Educaţiei Naţionale

S. STOILOV
Rectorul Universităţii Bucureşti

G. VRÂNCEANU
Decanul Fac. Ştiinţe Bucureşti

Secretar P. SERGESCU, Delegat al Soc. „Gazeta Matematică".

ASUPRA UNOR PARALELOGRAME ÎNSCRISE ÎNTR'UN PARALELOGRAM DAT

1. Se cunoaşte proprietatea elementară că dacă se poartă pe laturile unui paralelogram, începând din vârfuri şi în *acelaşi sens*, segmente egale, extremităţile acestor segmente sunt vârfurile unui paralelogram, *înscris* în cel dat.

Imi propun să găsesc *dreptunghiurile* şi *romburile* din această familie de paralelograme.

Voiu deosebi mai multe cazuri:

Cazul I: segmentele de pe laturile mari se poartă începând din vârfurile unghiurilor ascuţite.

Fie paralelogramul ABCD (fig. 1), censul pozitiv pe contur dela A la B. Fie de asemenea M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, DA, O centrul de simetrie al paralelogramului, $AM = a$, $AQ = b$, a fiind mai mare decât b, $\sphericalangle A = \varphi < 90^0$.

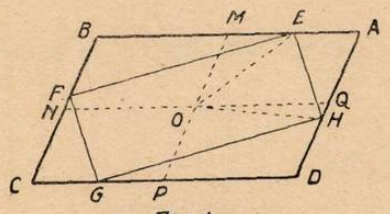


Fig. 1

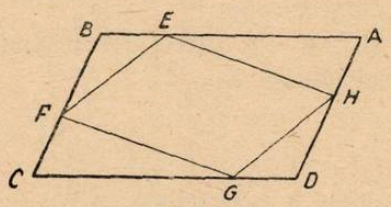


Fig. 2

Să notăm $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x < b$

toate aceste segmente fiind duse în sensul pozitiv fixat pe perimetru.

Urmează:

$$\overline{EM} = a - x\ ,\ \overline{HQ} = b - x\ ,\ \overline{HA} = 2b - x\ ,\ \overline{EB} = 2a - x.$$

Din triunghiurile OME, OQH, AEH, EBF avem:

(1) $\overline{OE}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{EM}^2 + 2\,\overline{OM} \cdot \overline{EM} \cos\varphi = b^2 + (a-x)^2 + 2b\ (a-x) \cos\varphi$;

(2) $\overline{OH}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{HQ}^2 - 2\,\overline{OQ} \cdot \overline{HQ} \cos\varphi = a^2 + (b-x)^2 - 2a\ (b-x) \cos\varphi$;

(3) $\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{HA}^2 - 2\,\overline{AE} \cdot \overline{HA} \cdot \cos\varphi = x^2 + (2b-x)^2 - 2x\,(2b-x) \cos\varphi$;

(4) $\overline{EF}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BF}^2 + 2\,\overline{EB} \cdot \overline{BF} \cdot \cos\varphi = (2a-x)^2 + x^2 + 2x\,(2a-x) \cos\varphi$.

Pentru ca paralelogramul EFGH să fie dreptunghiu, trebue ca semidiagonalele sale să fie egale, adică să avem:

$\overline{OE} = \overline{OH}$. adică, ţinând seamă de (1) şi (2):

$$b^2 + (a-x)^2 + 2b(a-x)\cos\varphi = a^2 + (b-x)^2 - 2a(b-x)\cos\varphi.$$

Făcând calculele, se găseşte o ecuaţie de gradul I, a cărei rădăcină este:

$$x_1 = \frac{2ab\cos\varphi}{a - b + (a+b)\cos\varphi},$$

căreia îi corespunde un dreptunghiu $\mathcal{D}_1$, înscris în paralelogramul dat

Se constată uşor că $x_1 < b$, adică F este între B şi N.

Pentru ca paralelogramul să fie romb, trebue să avem: $\overline{EF} = \overline{EH}$, adică, având în vedere (3) şi (4):

$$x^2 + (2a-x)^2 + 2x(2a-x)\cos\varphi = x^2 + (2b-x)^2 - 2x(2b-x)\cos\varphi.$$

Făcând calculele, găsim o ecuaţie de gradul II, ale cărei rădăcini sunt:

$x_1' = a - b$, căreia îl corespunde un romb R_1, înscris în paralelogramul dat, şi

$$x_1'' = -\frac{a-b}{\cos\varphi},$$

căreia îi corespunde un romb R_1'', înscris în paralelogram.

Cazul II: segmentele egale se poartă în acelaşi sens de parcurgere al perimetrului, astfel încât pe o latură mare se poartă începând din vârful unghiului obtus (fig. 2).

In acest caz, socotind ca sens pozitiv sensul în care sunt duse segmentele şi procedând ca la cazul I, se găseşte că segmentele au valorile:

$$x_2 = \frac{2ab\cos\varphi}{-a + b + (a+b)\cos\varphi},$$

căreia îi corespunde un dreptunghiu $\mathcal{D}_2$;

$x_2' = a + b$, căreia îi corespunde un romb R_2';

$x_2'' = \frac{a-b}{\cos\varphi}$, căreia îi corespunde un romb R_2''.

Cazul III: segmentele se poartă pe laturile mari începând din vârfurile unghiurilor ascuţite, iar pe laturile mici începând

din vârfurile unghiurilor obtuse, astfel încât, dacă pe laturile mari sunt duse pe laturi, *pe laturile mici să fie pe* prelungirile *acestora (sau invers)* (fig. 3).

Socotind ca sens pozitiv, pe laturile mari, sensul dela vârful unghiului ascuţit la vârful unghiului obtus, se găsesc valorile:

$x_3 = \frac{2ab\cos\varphi}{a+b+(-a+b)\cos\varphi}$, căreia îi corespunde un dreptunghiu $\mathcal{D}_3$;

$x_3' = a - b$, căreia îi corespunde un romb R_3';

$x_3'' = \frac{a+b}{\cos\varphi}$, căreia îi corespunde un romb R_3''.

Cazul IV: segmentele se poartă pe laturile mari, *începând din vârfurile unghiurilor obtuse şi pe* prelungirile laturilor mici, *începând din vârfurile unghiurilor ascuţite* (fig. 4).

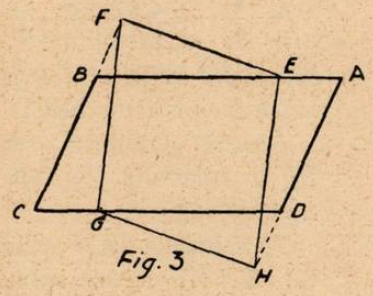


Fig. 3

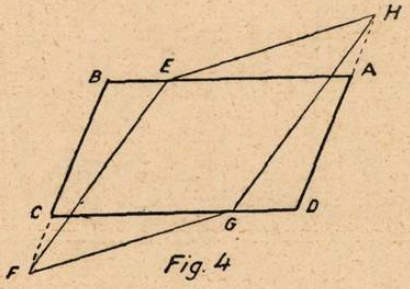


Fig. 4

Sensul pozitiv fiind, pe laturile mari, dela vârful unghiului obtus la vârful unghiului ascuţit, se găsesc valorile:

$x_4 = \frac{-2ab\cos\varphi}{a+b+(a-b)\cos\varphi}$, căreia îi corespunde un dreptunghiu $\mathcal{D}_4$

$x_4' = a - b$, căreia îi corespunde un romb R_4';

$x_4'' = -\frac{a+b}{\cos\varphi}$, căreia îi corespunde un romb R_3;

2. Ne dăm uşor seamă că romburile R_2' şi R_3' *nu sunt distincte*; de asemenea R_1' şi R_4'.

Deoarece (fig. 5) triunghiurile $BE_1'F_2'$ şi $CG_1'F_2'$ sunt isoscele şi au unghiurile dela vârf egale, urmează că bazele lor sunt paralele şi deci, pentru că sunt duse amândouă din F_2', aceste baze se confundă. Aceasta însemnează că diagonalele E_1G_1 şi $F_2'H_2'$ ale romburilor R_1' şi R_2' sunt aşezate pe aceeaşi dreaptă. Acelaşi lucru se arată şi despre celelalte diagonale.

3. Să calculăm ariile romburilor R_1' şi R_2'. Introducând în relaţiile (1) şi (2) valoarea lui x_1', găsim :

$$\overline{OE}^2 = 2b^2 . (1 - \cos\varphi),$$

$$\overline{OH}^2 = 2a^2 . (1 + \cos\varphi),$$

de unde :

$$\overline{OE}^2 . \overline{OH}^2 = 4a^2 b^2 (1 - \cos^2\varphi) = 4a^2 b^2 \sin^2\varphi$$

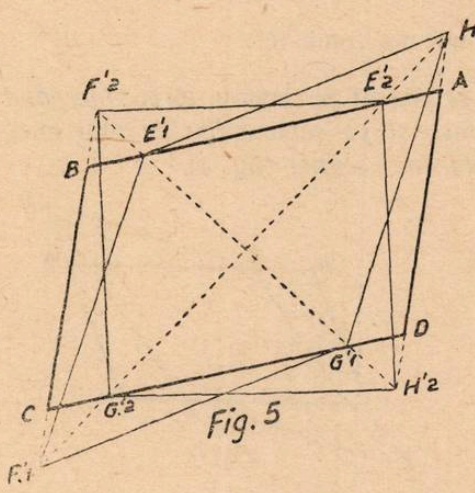


Fig. 5

$\therefore \overline{OE} . \overline{OH} = 2ab \sin\varphi$, iar aria S_1' a rombului R_1' este :

$S_1' = 2\overline{OE} . \overline{OH} = 4ab \sin\varphi$, ceea ce înseamnă că *aria* S_1' *a rombului* R *este egală cu aria* S *a paralelogramului dat* ABCD.

Analog găsim că aria S_2' a rombului R_2' are aceeaşi valoare.

Să calculăm acum ariile S_1'', S_2'', S_3'', S_4'' ale romburilor R_1'', R_2'', R_3'', R_4''.

Pentru R_1'' avem succesiv, ţinând seamă de valoarea x_1'' a lui x, pe care o înlocuim în (1) şi (2):

$$\overline{OE}^2 = b^2 + \left(a + \frac{a-b}{\cos\varphi}\right)^2 + 2b\left(a + \frac{a-b}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi =$$

$$\frac{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\varphi} \cdot \left(a^2 \cos^2\frac{\varphi}{2} - ab\sin^2\varphi + b^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \cdot$$

$$\overline{OH}^2 = a^2 + \left(b + \frac{a-b}{\cos\varphi}\right)^2 - 2a\left(b + \frac{a-b}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi =$$

$$\frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\varphi}\left(a^2 \cos^2\frac{\varphi}{2} - ab\sin^2\varphi + b^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \cdot$$

Deducem:

$$\overline{OE}^2 \cdot \overline{OH}^2 = \frac{16 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^4 \varphi} \left(a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - ab \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^2 ;$$

$$\overline{OE} \cdot \overline{OH} = \frac{4 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \varphi} \left(a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - ab \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) =$$

$$\frac{2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \left(a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - ab \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) = S_1'' .$$

Un calcul analog ne dă:

$$S_2'' = \frac{4 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \left(a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - ab \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) ;$$

$$S_3'' = \frac{4 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \left(a^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + ab \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) ;$$

$$S_4'' = \frac{4 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \left(a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + ab \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) .$$

Se observă imediat că avem:

$$S_1'' + S_3'' = S_2'' + S_4'' = \frac{4 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} (a^2 + b^2).$$

A. DOBRESCU.

DISCUȚIA ȘI SEPARAREA RĂDĂCINILOR ECUAȚIILOR PSEUDO-RECIPROCE

I. Se știe că o ecuație de gradul $2n$:

(1) $$A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + \ldots + A_{2n-1} x + A_{2n} = 0$$

se zice *pseudo-reciprocă* [1]), dacă între coeficienții ei există relațiunea

(2) $$A_{2n-i} = A_i \alpha^{n-i} \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

1) I. V. MĂTIEȘ: Ecuațiuni pseudo-reciproce, G. M., Vol. XLVII, pag. 251.

Ecuaţia (1) scriindu-se

$$A_0(x^n+\alpha^n/x^n)+A_1(x^{n-1}+\alpha^{n-1}/x^{n-1})+\ldots+A_{n-1}(x+\alpha/x)+A_n=0$$

prin substituţia

$$(3) \qquad u=x+\frac{\alpha}{x} \quad , \quad (\alpha\neq 0)$$

după calcularea polinoamelor [1])

$$(4) \qquad P_m(u)=x^m+\frac{\alpha^m}{x^m} \quad , \quad (m=1,\ 2,\ldots,n)$$

se ajunge la ecuaţia de gradul n

$$(5) \qquad a_0 u^n+a_1 u^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$

Este evident că natura rădăcinilor ecuaţiei (1), depinde de natura rădăcinilor ecuaţiilor (3) şi (5). Dacă ecuaţia (1) depinde de un parametru real λ de el va depinde şi ecuaţiile (3) şi (5). Discuţia ecuaţiei (1) se poate înlocui prin discuţia ecuaţiei (5), la care se asociază realizantul ecuaţiei în x, obţinut din (3).

Rezolvăm ecuaţia (5) în raport cu λ, obţinând

$$(5') \qquad \lambda=\varphi(u)$$

şi aplicând metoda utilizată de D-l Prof. N. ABRAMESCU în *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII, pag. 396, vom reprezenta grafic

$$(6) \qquad v=\varphi(u) \quad , \quad (7) \quad v=\lambda$$

în planul *uov*.

Abscisele punctelor de intersecţie a dreptei (7) cu curba (6) corespund rădăcinilor reale ale ecuaţiei (5') sau (5) şi astfel se pot găsi cel puţin intervalul rădăcinilor reale la (5) precum şi numărul lor. Punctele de intersecţie ale curbei (6) cu dreapta (7) fiind $N(u_p,\ \lambda)$ rădăcinile reale ale ecuaţiei (5) sunt

$$(8) \qquad u=u_p \quad , \quad (p=1,\ 2,\ldots,\ m\leqslant n).$$

Tot pe planul *uov* vom reprezenta grafic curba

$$(9) \qquad h(u,\ v)=u^2-4\alpha(v)=0 \qquad (\lambda=v)$$

$u^2-4\alpha$ fiind realizantul ecuaţiei în x

$$(3') \qquad x^2-u.x+\alpha=0$$

obţinută din (3).

---

1) ŞT. MUSTA: Asupra unor polinoame, G. M., XXXIV, pag. 245.

Curba (9) separă planul *uov* în două categorii de regiuni: Regiunile, având puncte N (u, v), ce satisfac inegalităţii

$$(1) \qquad h(u, v) \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad u^2 - 4\alpha(v) \geqslant 0$$

u fiind una din valorile (8), iar $v = \lambda$, date de (10) ne permit să obţinem ecuaţii din (3'), ce dau rădăcini reale pentru (1) şi anume:

$$(11) \qquad x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4\alpha}}{2}.$$

Dacă N (u, v) sunt situate în regiuni pentru care realizantul ecuaţiei (3') este negativ, (11) va da valori imaginare pentru (1).

In concluzie, punctele N (u, v) de pe ramurile curbei (6) situate în regiunile planului *uov*, ce verifică inegalitatea (10) referitoare la curba (3), ne permit a găsi toate valorile u şi $v = \lambda$, cari înlocuite în (3') ne dau toate ecuaţiile, ce admit rădăcini reale distincte sau confundate pentru ecuaţia (1). Celelalte puncte dau valori pentru u şi $v = \lambda$, ce furnizează prin (3') rădăcini imaginare pentru ecuaţia (1).

Observare. Valorile singulare a le lui λ, date de ecuaţia

$$(12) \qquad \alpha(\lambda) = 0$$

exceptate de substituţia (3), se studiază separat.

II. **Aplicaţii.** 1. *Să se discute ecuaţia*

$$(13) \quad f(x, \lambda) = x^4 - 2x^3 + (\lambda^2 + 2)x^2 - 2(\lambda + 1)x + (\lambda + 1)^2 = 0$$

λ *fiind un parametru real.*

Ecuaţia scriindu-se succesiv

$$x^2 - 2x + \lambda^2 + 2 - 2\frac{\lambda + 1}{x} + \frac{(\lambda + 1)^2}{x^2} = 0$$

$$\therefore \left[x^2 + \frac{(\lambda + 1)^2}{x^2}\right] - 2\left[x + \frac{\lambda + 1}{x}\right] + \lambda^2 + 2 = 0$$

se vede că e o ecuaţie pseudo-reciprocă şi prin substituţia

$$(14) \qquad u = x + \frac{\lambda + 1}{x}, \quad (\lambda \neq -1)$$

se obţine

$$(15) \qquad u^2 + \lambda^2 - 2u - 2\lambda = 0$$

corespunzătoare ecuaţiei (5).

Substituţia (14) scriindu-se

$$x^2 + ux + (\lambda + 1) = 0 \tag{14'}$$

are ca realizant expresia

$$r(u, \lambda) = u^2 - 4(\lambda + 1).$$

Aplicând cele spuse mai sus, construim curbele corespunzătoare în planul *uov* (Fig. 1) pentru funcţiunile

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - 2u - 2v = 0 \\ u^2 - 4(v + 1) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

şi le vom tăia cu dreapta variabilă

$$v = \lambda. \tag{17}$$

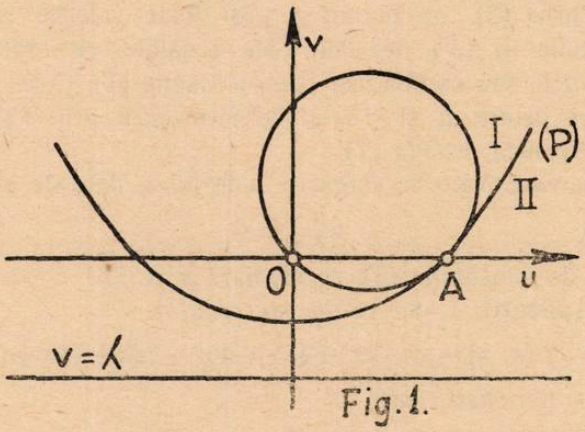


Fig. 1.

Funcţiunea primă din (16) reprezintă un cerc cu centru $u_0 = 1$, $v = 1$ şi trece prin origine. El e tangent interior parabolei $u^2 - 4(v + 1) = 0$ în punctul A (2, 0), căci eliminarea lui v în (16) ne furnizează ecuaţia

$$(u - 2)^2 (u^2 + 4u + 12) = 0$$

având ca rădăcini reale, rădăcina dublă $x = 2$.

Regiunea II din planul *uov* exterioară parabolei (P) conţine puncte cu abscisele, ce verifică relaţia

$$u^2 - 4(\lambda + 1) \geqslant 0$$

egalitate având loc pentru punctele de pe parabola (P). Cum însă

cercul e interior parabolei, dreapta (17) îl întâlneşte în puncte $N(u, \lambda)$, ale căror coordonate verifică relaţia

$$u^2 - 4(\lambda + 1) \leqslant 0$$

ce ne furnizează valori, pentru care (14) ne permite a găsi pentru x valori imaginare, afară de cazul $\lambda = 0$, $u = 2$, coordonatele punctului de tangenţă. In acest caz, avem

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$$

o rădăcină dublă şi reală pentru ecuaţia (13).

Valorile singulare exceptate de (14), fiind date de

$$\alpha(\lambda) = \lambda + 1 = 0 \quad \therefore \quad \lambda = -1,$$

iar ecuaţia (13) fiind

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 = 0 \quad \therefore \quad x^2(x^2 - 2x + 3) = 0$$

admite în acest caz o rădăcină reală $x = 0$ şi două rădăcini imaginare.

Deci ecuaţia propusă are întotdeauna 4 rădăcini imaginare, afară de cazurile $\lambda = -1$ şi $\lambda = 0$, când are 2 rădăcini imaginare şi câte o rădăcină dublă $x = 0$ sau $x = 1$.

Observare. Profitând de faptul că ecuaţia propusă în raport cu λ (care e real) este de gradul doi, adică

$$(x + 1)\lambda^2 - 2(x - 1)\lambda + (x^4 - 2x^2 + 2x^2 - 2x + 1) = 0$$

o mai putem soluţiona şi astfel:

Parametrul λ fiind real, avem condiţia

$$R(x) = (x - 1)^2 - (x^2 + 1)(x - 1)^2(x^2 + 1) \geqslant 0$$

$$\therefore \quad (x - 1)^2(-x^2)(x^2 + 2) \geqslant 0 \quad \therefore \quad x^2(x - 1)^2(x^2 + 2) \leqslant 0$$

care admite, în cazul egalităţii, ca soluţii numai

$$x^2 = 0 \quad \text{şi} \quad (x - 1)^2 = 0$$

fiind singurele valori reale, ca rădăcini şi pentru (13) şi anume:

$$x_{1,2} = 0 \quad \text{în cazul} \quad \lambda = +1$$

şi

$$x_{1,2} = 1 \quad \text{în cazul} \quad \lambda = 0$$

ceea ce constitue şi o verificare a rezultatelor din prima soluţie.

2. *Să se discute ecuaţia*

$$(18) \qquad x^6 + 3(\lambda^2 - 1)x^4 - \lambda x^3 + 3\lambda^2(\lambda^2 - 1)x^2 + \lambda^6 = 0$$

λ fiind un parametru real.

Ecuaţia 18 fiind o ecuaţie pseudo-reciprocă, prin substituţia

$$(19) \qquad u = x + \frac{\lambda^2}{x} \quad , \quad [R\,u,\,\lambda) = u^2 - 4\lambda^2] \quad , \quad \lambda \neq 0$$

se ajunge la ecuaţia de gradul trei

$$(20) \qquad u^3 - 3u - \lambda = 0.$$

Pe planul *uov* construim curba (Γ), dată de

$$(21) \qquad v = u^3 - 3u$$

precum şi dreptele (D_1) şi (D_2), date de

$$(22) \qquad u^2 - 4v^2 = (u - 2v)\,(u + 2v) = 0$$

ce separă planul *uov* în patru regiuni I — IV (Fig. 2).

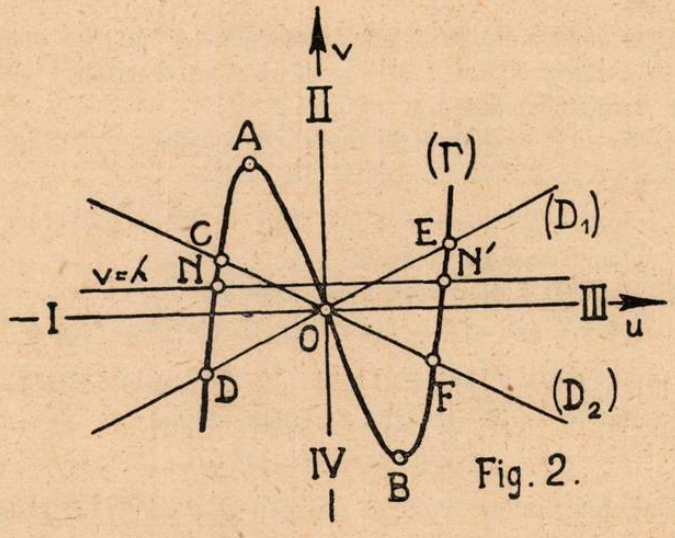


Fig. 2.

Realizantul $R(u, v)$ în privinţa lui x, din (19) este pozitiv în regiunile I şi III sau este zero pe dreptele D_1 şi D_2 şi este negativ în regiunile II şi IV, u şi v fiind coordonatele punctelor din aceste regiuni.

Curba (Γ) în regiunile I şi III posedă ramurile de curbă $\overset{\frown}{CD}$ şi $\overset{\frown}{EF}$, precum şi punctul singular $O(o, o)$.

Căutând intersecţia lui (21) cu (22) adică intersecţia curbei (Γ) cu (D_1) şi (D_2) se obţin punctele:

$$C\left(u = -\frac{\sqrt{10}}{2} = -1{,}5811\ldots,\ v = \lambda = +\frac{\sqrt{10}}{4} = 0{,}7905\ldots\right)$$

$$D\left(u = -\frac{\sqrt{14}}{2} = -1{,}8708\ldots,\ v = \lambda = -\frac{\sqrt{14}}{4} = -0{,}9354\ldots\right)$$

$$E\left(u = +\frac{\sqrt{14}}{2} = +1{,}8708\ldots,\ v = \lambda = +\frac{\sqrt{14}}{4} = +0{,}9354\ldots\right)$$

$$F\left(u = +\frac{\sqrt{10}}{2} = +1{,}5811\ldots,\ v = \lambda = -\frac{\sqrt{10}}{4} = -0{,}7905\ldots\right)$$

Dacă considerăm dreapta variabilă $v = \lambda$, ca intersectând curba (Γ) în regiunile I şi III, ne furnizează valori pentru u şi $v = \lambda$ cărora (19) le oferă valori reale pentru x, care sunt tocmai rădăcinile reale ale ecuaţiei (18).

Urmărind figura 2 în baza celor de sus, discuţia ecuaţiei (18) se rezumă astfel:

1°. $\lambda > \frac{\sqrt{14}}{4}$. Dreapta $v = \lambda$ nu întâlneşte curba (Γ) în regiunile I sau III. Ecuaţia (18) are 6 rădăcini imaginare.

2°. $\lambda = \frac{\sqrt{14}}{4}$ Dreapta $v = \lambda$ trece prin punctul F. Ecuaţia (19) are ca rădăcină reală şi dublă $x = \frac{\sqrt{14}}{4}$. Ea e rădăcină şi pentru ecuaţia (18), care mai are 4 rădăcini imaginare.

3°. $\frac{\sqrt{10}}{4} < \lambda < \frac{\sqrt{14}}{4}$. Dreapta $v = \lambda$ taie curba (Γ) într'un punct din regiunea III. Ecuaţia (18) are 2 rădăcini reale şi 4 rădăcini imaginare.

4°. $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{4}$. Dreapta $v = \lambda$ taie pe (Γ) în punctul c şi încă într'un punct pe ramura $\overset{\frown}{EF}$. Ecuaţia (18) are o rădăcină reală şi dublă $x = -\frac{1}{4}\sqrt{10}$ şi încă 2 rădăcini reale, distincte, rămânând 2 rădăcini imaginare.

5°. $0 < \lambda < \frac{1}{4}\sqrt{10}$. Dreapta $v = \lambda$ întâlneşte pe (Γ) în două puncte, respectiv unul în regiunea I şi altul în regiunea III. Ecuaţia (18) are 4 rădăcini reale şi distincte şi 2 rădăcini imaginare.

6°. $\lambda = 0$. Ecuaţia fiind

$$x^6 - 3x^4 = 0 \quad \therefore \quad x^4(x^2 - 3) = 0$$

are $x_{1,2,3,4} = 0$ şi $x_{5,6} = \pm\sqrt{3}$.

7°. $\lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{10} < \lambda < 0$ concluzie analoagă cu 5°.

8°. $\lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{10}$. Concluzie ca la 4°, dar $x_{1,2} = \frac{1}{4}\sqrt{10}$.

9°. $-\frac{1}{4}\sqrt{14} < \lambda < \sqrt{10}$. Concluzie ca la 3°.

10°. $\lambda = -\frac{1}{4}\sqrt{14}$. Concluzie ca la 2°, dar $x_{1,2} = -\sqrt{14}$.

11°. $\lambda < -\frac{1}{4}\sqrt{14}$. Concluzie analoagă cu 1°.

I. V. MĂTIEŞ.

RAPORTUL PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „SPIRU-HARET"

Comisiunea pentru decernarea premiului «SPIRU HARET» constatând că anul acesta niciun corespondent nu are activitate suficientă în domeniul mecanicii pentru a putea obţine acest premiu, propune a se amâna decernarea premiului pentru anul viitor.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „SPIRU HARET"

AL. BUNESCU, AL. STOENESCU,
GABRIELA ŢIŢEICA.

Acest raport a fost aprobat în Adunarea generală din 19 Februarie 1945.

NOTE MATEMATICE

44. *Asupra problemei 4550.* Rezolvată la pag. 39 din acest volum, problema aceasta a fost propusă de D-l M. GHERMĂNESCU în *Gazeta Matematică* în numărul dela 15 August 1935.

Patru ani mai târziu şi anume în *Mathesis* de pe luna Decembrie 1939, ea a fost propusă sub Nr. 3107 de D-l V. THÉBAULT cu următorul enunţ:

Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pris une fois, former deux cubes.

Am trimis D-lui V. THÉBAULT soluţia mea care începea prin a arăta ca problema fusese propusă anterior de D-l M. GHERMĂNESCU, în *Gazeta Matematică.*

In Vol. LIX, numărul din Decembrie 1942 revista *Mathesis* publică la pag. 333 soluţia mea, care începe cu preambulul care fixează prioritatea D-lui M. GHERMĂNESCU. Cred interesant să dau aci în rezumat soluţia care mi s'a publicat în *Mathesis* şi care diferă de soluţia publicată la pag. 39 din acest volum.

Fie M^3 şi N^3 cuburile căutate. Distingem mai multe cazuri.

1°. M^3 are o cifră şi N^3 are 8 cifre. Singurele cuburi de o cifră sunt 1 şi 8.

Dacă $M^3 = 1$ atunci N^3 trebue să fie format din cifrele 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aşa în cât:

$$23456789 \leqslant N^3 \leqslant 98765432 \quad \therefore \quad 286 \leqslant N \leqslant 463.$$

In plus trebue ca

$$N^3 = 9m + 8 \quad \therefore \quad N = 9p + 1 \text{ sau } 7.$$

Din şirul numerelor 286, 287, ... 463 se elimină acelea terminate cu 0 şi 1 şi acelea care nu sunt de forma $9p + 1$ sau $9p + 7$. Numerele rămase ridicate la cub, nu dau soluţii.

Pentru $M^3 = 8$ se procedează analog şi se găsesc soluţiile

$$2^3 = 8 \quad \text{cu} \quad 289^3 = 24137569$$

şi

$$2^3 = 8 \quad \text{cu} \quad 319^3 = 32461589.$$

2°. M^3 are 2 cifre şi N^3 are 7 cifre. Nu sunt soluţii.

3°. M^3 are 3 cifre. Se găsesc soluţiile

$$5^3 = 125 \text{ şi } 8^3 = 512 \quad \text{cu} \quad 76^3 = 438976.$$

4°. M^3 are 4 cifre. Nu se găsesc soluţii.

In cazul întrebuinţării tuturor celor 10 cifre, problema are o singură soluţie şi anume

$$21^3 = 9261 \quad \text{cu} \quad 93^3 = 804357.$$

G-L GH. BUICLIU.

45. *Asupra exerciţiului 58, cap. XIV din Culegere de probleme de Algebră.* In soluţia dată acestui exerciţiu, la pag. 150, s'a pierdut soluţii, pentrucă relaţia

$$x^3 + y^3 + 3axy = a^3$$

nu atrage numai $x + y = a$. Avem, în adevăr

$$x^3 + y^3 - a^3 + 3axy = (x + y - a) \times (x^2 + y^2 + a^2 + ax + ay - xy)$$

şi anularea părţii întâia a identităţii poate să provină şi prin anularea celui de al doilea factor al părţii a doua.

N. M.

46. *O problemă de concurs.* Imi propun a indica aci o soluţiune geometrică pentru problema de geometrie analitică propusă la concursul din anul acesta al G. M.[1]):

1. Axele Ox şi Oy fiind presupuse rectangulare, să determinăm mai întâi condiţiunea necesară şi suficientă ca dreapta D:

$$(D) \qquad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

să fie tangentă cercului C:

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0.$$

Cercul (C) are centrul în punctul $A(a, a)$ şi este tangent axelor Ox şi Oy. Dreapta (D) fiind tangentă acestui cerc, punctele $P(p, o)$ şi $Q(o, q)$, unde această dreaptă intersectează axele, se corespund în omografie. Condiţiunea căutată este prin urmare o relaţiune omografică între p şi q.

Această relaţiune este însă şi involutivă, adică simetrică în raport cu p şi q fiindcă dacă dreapta D este tangentă cercului (C) şi dreapta:

$$\frac{x}{q} + \frac{y}{p} = 1$$

1) A se vedea enunţul în G. M., Vol. L, pag. 389.

simetrică primei în raport cu bisectoarea $x = y$, este de asemeni tangentă aceluiaşi cerc. Relaţiunea căutată se poate deci, scrie:

$$p \cdot q + u(p + q) + v = 0$$

u şi v fiind doi coeficienţi ce se obţin considerând două poziţiuni particulare ale dreptei D.

Astfel, dacă punctul Q (p, o) tinde către origine, punctul P (o, p) tinde către punctul de contact al cercului C, cu OX. Relaţiunea noastră este prin urmare verificată pentru $q = o$ şi $p = a$ sau:

$$au + V = 0.$$

De asemeni, dacă D este paralelă cu Oy avem $p = 2a$ şi $q = \infty$ sau:

$$2a + u = 0.$$

Condiţiunea necesară şi suficientă pentru ca dreapta D să fie tangentă cercului C, devine:

$$\begin{vmatrix} p \cdot q & p+q & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 2a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sau, în definitiv:

(E) $$p \cdot q - 2a(p \cdot q) + 2a^2 = 0.$$

2. Se ştie (teorema lui FEUERBACH) că cercul lui EULER este tangent cercurilor înscris sau exînscrise triunghiului.

Triunghiul OPQ fiind dreptunghic, cercul circumscris γ este omotetic cercului lui EULER, centrul de omotetie fiind O, iar raportul de omotetie 2. Rezultă că cercul γ, este tangent cercului C_1

(C_1) $$x^2 + y^2 - 4a(x + y) + 4a^2 = 0$$

omotetic cercului C, în aceleaşi condiţiuni ca şi cercul γ, în raport cu cercul lui EULER.

3 şi 4. Când dreapta D, variază rămânând tangentă cercului C, cercul γ trece prin origine şi este tangent cercului C_1. Rezultă că centrul M, al cercului γ descrie o hiperbolă (H) având unul din focare în O, iar cealălalt în centrul cercului C_1. Cercul C_1 este evident cerc director pentru această hiperbolă (H).

Printre cercurile trecând prin A şi tangente cercului C_1 se găsesc şi axele Ox şi Oy (cercuri de rază infinită). Centrele acestor cercuri sunt la infinit, pentru Ox în direcţia lui Oy şi pentru Oy în direcţia lui Ox. Direcţiunile asimptotice ale hiperbolei H sunt prin urmare paralele axelor de coordonate. Hiperbola H este deci echilateră.

5. Simetricul focarului O în raport cu tangenta în M la hiperbola H se găseşte pe cercul director relativ la celălalt focar sau pe cercul C_1. Pe dealtă parte cercul γ trecând prin A simetricul acestui punct în raport cu un diametru — tangenta în M la H — se găseşte tot pe acelaşi cerc γ. Simetricul originei în raport cu tangenta în M la hiperbola H se găseşte deci şi pe cercul C_1 şi pe cercul γ. Prin urmare, acest punct coincide cu punctul de contact al celor două cercuri.

Această ultimă propoziţiune este dealtminteri un caz particular al alteia, mai generală.

Presupunem că cercul γ variază rămânând tangent la două curbe Γ_1 şi Γ_2. Tangenta la curba descrisă de centrul cercului γ este perpendiculară pe mijlocul coardei ce uneşte punctele de contact ale cercului γ cu cele două curbe învăluitoare: Γ_1 şi Γ_2. In cazul nostru, particular, una din curbele Γ se reduce la un singur punct, origina O, iar cealaltă este cercul C_1.

Ş. G.

47. *O proprietate funcţională, comună cercului şi spiralei logaritmice.* In articolul publicat sub acest titlu la pag. 246—249, am considerat pe h, când ca variabilă, când ca parametru, ceea ce nu era just, după cum îmi atrage atenţia D-l VÂLCOVICI. De aceea, deşi concluziile finale ale articolului rămân aceleaşi, este nevoie de unele modificări în rezultatele intermediare, modificări obţinute înlocuind pretutindeni funcţiile arbitrare de h prin funcţii arbitrare de forma $u\left(\frac{x}{h}, h\right)$, unde $u(z+1, h) = u(z, h)$. Astfel, soluţia generală a ecuaţiei funcţionale (2) este o funcţie arbitrară $\varphi\left(\frac{x}{h}, h\right)$, unde $\varphi(z+1, h) = \varphi(z, h)$; soluţia generală a ecuaţiei funcţionale

$$(3') \quad f(x+h, h) = \varphi\left(\frac{x}{h}, h\right) f(x, h) \ , \ \varphi(z+1, h) = \varphi(z, h),$$

care cuprinde pe (3), este dată de

$$(4') \qquad f(x, h) = A\left(\frac{x}{h}, h\right)\left[\varphi\left(\frac{x}{h}\right)\right]^{\frac{x}{h}},$$

care cuprinde pe (4) şi care cere $A = \text{const}$, $\varphi = e^{ah}$ când $f(x)$ conţine numai pe x, astfel că, înlocuind şi în ecuaţia (5) şi (6), $\varphi(h)$, $\psi(h)$ prin $\varphi\left(\frac{x}{h}, h\right)$, $\psi\left(\frac{x}{h}, h\right)$, se deduce din ele o ecuaţie de tipul (3'), a cărei soluţie independentă de h este $f(x) = Ae^{ax}$, etc.

M. G.

48. *Asupra problemei 2578.* Voi trata problema următoare: *„Să se găsească o funcţie aşa ca rădăcina a m^a a funcţiei ei primitive să fie funcţia primitivă a rădăcinei a n^a a ei“*, ea mărind câmpul problemei 2578.

Fie ca în soluţia dela pag. 34, Vol. XLV, $\varphi(x)$ funcţia căutată. Vom avea:

$$\sqrt[m]{\int \varphi(x)\, dx} = \int \sqrt[n]{\varphi(x)}\, dx. \qquad (1)$$

Notez $\qquad \int \varphi(x)\, dx = y \quad \therefore \quad \varphi(x) = y'$

(1) devine $\qquad \sqrt[m]{y} = \int \sqrt[n]{y'}\, dx.$

Diferenţiind obţin

$$\frac{1}{m} y' y^{\frac{1-m}{m}} = y'^{\frac{1}{n}} \quad \therefore \quad m^{\frac{n}{n-1}}\, y^{\frac{(1-m)n}{(1-n)m}} = y'. \qquad (2)$$

Notez $\qquad a = m^{\frac{n}{n-1}} \quad b = \frac{(1-m)n}{(1-n)m}. \qquad (3)$

Astfel (2) devine

$$y' = ay^b \quad \therefore \quad y' y^{-b} = a.$$

Se presupune $b \neq 1$ căci altfel rezultă $m = n$

$$\therefore \quad \frac{1}{1-b} b^{1-b} = ax + k \qquad (b \neq 1).$$

Deci

$$y = [(1 - b)(ax + k)]^{\frac{1}{1-b}}$$

$$\therefore \quad \varphi(x) = y' = a[(1 - b)(ax + k)]^{\frac{b}{1-b}}$$

unde a şi b au valorile (3).

Inlocuind în expresia lui $\varphi(x)$ aceste valori găsesc:

$$\varphi(x) = m^{\frac{n}{n-1}} \left[\frac{m - n}{m(1 - n)}(xm^{\frac{n}{n-1}} + k)\right]^{\frac{(1-m)n}{m-n}}.$$

Observaţiuni. 1°. Pentru $m = 3$ şi $n = 2$ am găsit:

$$\varphi(x) = \frac{3^6}{(9x + k)^4}.$$

Şi avem

$$\sqrt{\int \varphi(x)\,dx} = \int \sqrt{\varphi(x)}\,dx = -\frac{3}{9x + k}.$$

2°. Pentru a avea egalitate între cei doi membri trebue ca la operaţiile de integrare, constantele de integrare să fie nule.

3°. Constanta de integrare a membrului II poate fi diferită de zero dacă a membrului I e zero, sau invers şi atunci avem:

$$\sqrt[m]{\int \varphi(x)\,dx} - \int \sqrt[n]{\varphi(x)}\,dx = \text{constantă}.$$

SLT. MIRCEA D. POPA.

CHESTIUNI DE EXAMEN

POLITECHNICA DIN BUCUREŞTI. SECŢIA ELECTROMECANICĂ

Lucrare scrisă la examenul de admitere din Noembrie 1944

Algebră. Se consideră funcţiunea

$$y = x^3(x - a)^2$$

şi se cere:

1°. Să se studieze variaţia acestei funcţiuni şi să se reprezinte grafic această variaţie în cazul $a = 2$.

2°. Să se deducă din studiul dela 1° numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$x^3(x - a)^2 - \lambda = 0$$

după valorile lui λ.

3°. Să se afle cu două zecimale exacte rădăcinile reale ale ecuației

$$x^3 (x-2)^2 = 1000.$$

Trigonometrie. 1°. Să se rezolve și discute sistemul:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \alpha \quad ; \quad \operatorname{tg}(x+y) = \beta.$$

2°. m fiind un parametru variabil să se discute ecuația:

$$\operatorname{tg} x = 2m \sin \frac{x}{2}.$$

3°. Se dă

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \quad , \quad \cos 2b = \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}}.$$

Să se găsească relația care există între a și b.

BIBLIOGRAFIE

Revista Matematică din Timișoara. Anul XXV. Nr. 5. Iulie 1945. C. BORȘ: O metodă elementară pentru studiul conicelor. Note matematice, bibliografie, probleme rezolvate și propuse.

România Aeriană. Anul XIX. Nr. 4—5. Aprilie-Mai 1945. *România Aeriană:* Proiecte interesante. A. UDREA: Cinstirea meritelor. TH. NEGULICI: Sugestii pentru realizarea unei rețele aeriene poștale. C-DOR ANDREI POPOVICI: Am eliberat un vultur. GH. RADO: Motoarele Diesel în aviație. H. G. AUGUST: Am voit să sbor. I. N. COȘEREANU: Infrastructura în politica aeriană. NAPOLEON IONESCU: Asigurarea personalului aeronautic. GH. GH. MIRONESCU: Alegerea avioanelor și economia transporturilor aeriene viitoare. VALENTIN POPESCU: Planorișcă. I. MORARU: Aviatorilor C. F. R. P. VALERY: Voința de a fi un altul.

C.-AMIRAL C. BOERESCU: Din minunile naturei (Editura „Gândirea").

CERERI

336. În Aritmetica elementară se înțelege prin *număr complex* un număr exprimat prin unități principale și unități divizionare. În Algebră se zice *număr complex* numerele care se exprimă la un loc cu unități de natură diferită, ca de exemplu numerelor imaginare $(a + bi)$.

Nu s'a încercat o deosebire de numire între aceste două noțiuni atât de diferite una de alta?

I. I.

DIVERSE

a) Donaţia elevilor gimnaziului din Tg.-Ocna

Elevii gimnaziului „Oltuz" din Tg.-Ocna, imitând pe colegii lor din Turnu-Severin au trimes suma de 20.000 lei pentru fondul de tipărire al *Gazetei Matematice*. Donaţia va fi supusă, conform statutelor, hotărîrei celei mai apropiate Adunări generale a societăţei noastre. Până atunci aducem toate mulţumirile entuziaştilor elevi, care-şi dau obolul pentru scopuri aşa de frumoase.

b) Sporirea Bibliotecii „Gazeta Matematică"

GABRIELA ŢIŢEICA şi ALEXANDRU STOENESCU. Teoria giroscopului şi aplicaţiile sale tehnice.

Donată de D-şoara GABRIELA ŢIŢEICA.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3874. *Fie* ABCD *un patrunghiu şi* qrs *triunghiul său diagonal astfel că:* $q \equiv (AB, CD)$, $r \equiv (BD, CA)$, $s \equiv (BC, AD)$. *O dreaptă* Δ *trecând prin* A *taie pe* qr, rs, sq *respectiv în* s', q', r'. *Se consideră punctele:*

$$m \equiv (rr', qq') \quad \text{şi} \quad n \equiv (BrD, ss')$$

Să se arate că dreptele qn, A*r*C, sm *sunt concurente.*

ADRIAN C. GHEORGHIU.

Soluţie. Am fost condus la acest enunţ în urma generalizării ce am dat problemei 3649 a cărei soluţie directă s'a publicat în G. M. XXXVIII, pag. 265. Generalizarea constă în a găsi *învelitoarea tangentelor la conicele unui fascicol punctual în punctele unde acestea taie o dreaptă fixă.*

Fie A, B, C, D punctele comune distincte ale conicelor fasciculului şi fie Δ dreapta fixă. Pentru a găsi clasa înfăşurătoarei se face numărătoarea tangentelor din condiţiunile enunţului ce se pot duce dintr'un punct oarecare P.

Se ştie *(Compléments de géométrie moderne,* CHARLES MICHEL, pag. 104) că:

Locul punctelor de contact al tangentelor duse dintr'un punct fix P *la conicele unui fascicol punctual este o cubică.* (Generarea cubicelor, zisă a lui MAC-LAURIN).

Această cubică trece prin punctele A, B, C, D precum şi prin punctele diagonale *q*, *r*, *s* ale patrunghiului. De asemenea trece prin punctul P şi conjugatul său *p* faţă de conicele fascicolului.

Atunci, pentru a găsi tangentele ce se pot duce dintr'un punct oarecare P, la conicele unui fascicol punctual (ABCD), astfel ca punctele de contact să se găsească pe o dreaptă fixă Δ e de-ajuns a uni punctul P cu punctele de intersecţie ale dreptei Δ cu *cubica lui* MAC-LAURIN asociată punctului P faţă de fascicolul punctual de conica (ABCD).

Cum o dreaptă taie o cubică în trei puncte, rezultă că din punctul P oarecare se pot duce în condiţiile enunţului nostru trei tangente, deci *înfăşurătoarea cerută este de clasa 3.*

Să căutăm tangentele la înfăşurătoarea ce se poate duce din fiecare din punctele diagonale. Fie deci punctul $q \equiv$ (AB, CD) un punct P, cubica lui MAC-LAURIN asociată lui faţă de fascicolul punctual de conice (ABCD) se reduce la ansamblul de trei drepte (AB, CD, *rs*). Fie *q'* intersecţia dreptei *rs* cu dreapta Δ. Cele trei tangente din *q* la înfăşurătoare sunt deci AB, CD, *qq'*.

Fie *r'* şi *s'* punctele analoage lui *q'*, rezultă de aci că *înfăşurătoarea căutată este tangentă celor 6 laturi ale patrunghiului şi dreptelor qq', rr', ss'.*

Să mai observăm că dreapta Δ este o tangetă dublă a înfăşurătoarei, căci luând un punct P, pe această dreaptă, cubica asociată o taie încă în două puncte. Deci dintr'un astfel de punct P se duc la înfăşurătoarea cerută: o tangentă care este tangenta în P la cubică şi două tangente confundate cu dreapta Δ.

Caz particular. Să considerăm o dreaptă Δ trecând prin punctul A, de exemplu. Infăşurătoarea de clasa 3 se descompune atunci într'un *punct izolat*: A (determinat de intersecţia a cinci tangente AB, AC, AD şi Δ dublă) *şi o conică.* Rezultă de aci următoarea proprietate pentru un patrunghiu.

Fie ABCD *un patrunghiu şi* qrs *triunghiul său diagonal astfel că* $q \equiv$ (AB, CD), $r \equiv$ (BD , CA) , $s \equiv$ (BC, AD). *O dreaptă* Δ *trecând prin* A *taie pe* qr, rs, sq *respectiv în* s', q', r'.

Triunghiurile BCD *şi* (qq', rr', ss') *sunt circumscrise aceleiaşi conice.*

Enunţul problemei 3874 ascunde aceeaşi proprietate, căci din cele două triunghiuri se formează un exagon circumscris unei conice în care e valabilă deci teorema lui BRIANCHON.

In adevăr alegând următoarea ordine a laturilor exagonului circumscris:

$$rr' \ , \ qq' \ , \ q\mathrm{CD} \ , \ \mathrm{BC}s \ , \ ss' \ , \ \mathrm{D}r\mathrm{B}$$

avem următoarele vârfuri:

$$1 \equiv (rr', \ qq') \equiv m \qquad 4 \equiv (\mathrm{BC}s, \ ss') \equiv s$$

$$2 \equiv (qq', \ q\mathrm{CD}) \equiv q \qquad 5 \equiv (ss', \ \mathrm{D}r\mathrm{B}) \equiv n$$

$$3 \equiv (q\mathrm{CD}, \mathrm{BC}s) \equiv c \qquad 6 \equiv (\mathrm{D}r\mathrm{B}, \ rr') \equiv r$$

încât următoarele diagonale:

$$14 \equiv sm \ ; \ 25 \equiv qn \ ; \ 36 \equiv r\mathrm{C} \ (\mathrm{A}r\mathrm{C})$$

sunt concurente.

Observare. Problema 3874 poate avea şi o soluţie directă. S'a primit o soluţie bună de la D-l M. MARGULIUS.

A. G.

PROBLEMA 4745. *Să se arate că momentul de inerţie precum şi raza de giraţie a unei prisme drepte de înălţime* h *şi cu baza un patrat de latură* a, *în raport cu o muchie, sunt respectiv de patru ori şi de două ori mai mari decât momentul de inerţie şi raza de giraţie ale aceleiaşi prisme, dar în raport cu axa sa.*

PETRE MIRESCU.

Soluţie dată de D-l E. N. WEGENER (Politehnica Bucureşti).

Fie I momentul de inerţie în raport cu o muche a prismei. Alegând această muche ca axa Ox, iar drept axe Oy şi Oz laturile patratului de bază ce trec prin O avem:

$$I = \iiint \rho (z^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \rho \int_0^h dz \iint_{y=0}^{y=a} (z^2 + y^2) \, dy \, dz$$

$$I = \rho h \int_{z=0}^{z=a} \left(az^2 + \frac{a^3}{3} \right) dz = \frac{2}{3} \rho a^4 h$$

în care ρ este *massa specifică.*

Momentul de inerţie I_1 în raport cu axa prizmei se obţine analog.

$$I_1 = \iiint \rho \left[\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right] dx\, dy\, dz = \frac{1}{6}\rho a^4 h$$

Razele de giraţie respective r şi r_1 sunt:

$$r = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{I}{\rho a^2 h}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a \quad , \quad r_1 = \sqrt{\frac{I_1}{M}} = \sqrt{\frac{1}{6}}\, a$$

Avem evident:

$$\frac{I}{I_1} = 4 \qquad \frac{r}{r_1} = 2.$$

Observaţie. Valoarea lui I_1 se putea obţine şi direct cu formula:

$$I_1 = I - Md^2$$

în care $M = \rho a^2 h$ reprezintă massa totală a prizmei, iar $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ distanţa dintre muchia prizmei şi axa sa.

AL. ST.

PROBLEMA 5099. *Dreapta care uneşte centrele de curbură relative la* A, *ale conicelor de focare* B, C *şi trecând prin* A, *precum şi analoagele ei, taie laturile triunghiului* ABC *în trei puncte colineare.*

CPT. MILAIL I. FOCŞENEANU.

I°. *Soluţia I-a,* dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Să construim centrele de curbură relative la A, ale celor 2 conice care au drept focare B, C.

Fie A_1 şi A_2 picioarele bisectoarelor unghiului A. Perpendicularele în A_1 şi A_2 respectiv pe AA_1 şi AA_2 taie laturile AB şi AC în γ_1, γ şi β_1, β_2.

Perpendicularele în β_1 pe AC şi în γ_1 pe AB se întretaie în centrul de curbură A_1', iar perpendicularele în β_2, γ_2 respectiv pe AC şi AB se taie în A_2' centrul de curbură al celei de-a doua conici cu focarele în B, C şi trecând prin A.

Dreapta $A_1'A_2'$ taie latura BC în α, iar dreptele analoage taie respectiv pe CA, AB în β, γ.

Trebue să demonstrăm că α, β, γ sunt colineare.
Avem succesiv:

$$\overline{A_1'A_1} = \overline{A_1A}\,\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} \quad , \quad \overline{A_2'A_2} = \overline{A_2A}\,\mathrm{ctg}^2\frac{A}{2}$$

şi $$\frac{\overline{A_1'A_1}}{\overline{A_1'A}} = \sin^2\frac{A}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{A_2'A}}{\overline{A_2'A}} = \cos^2\frac{A}{2}.$$

Apoi din triunghiul A_1AA_2 tăiat de transversala $\alpha A_1' A_2'$

$$\frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{\alpha A_2}} = \frac{\overline{A_2'A}}{\overline{A_2'A_2}} \times \frac{\overline{A_1'A_1}}{\overline{A_1'A}} = \mathrm{tg}^2\frac{A}{2} \quad \text{deci} \quad \frac{\overline{\alpha A_1}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos A}$$

$$\therefore \quad \overline{\alpha A_1} = \frac{2abc\sin^2\frac{A}{2}}{(c^3 - b^2)\cos A} \quad , \quad \overline{\alpha A_2} = \frac{2abc\cos^2\frac{A}{2}}{(c^2 - b^2)\cos A}$$

$$\therefore \quad \overline{\alpha B} = \frac{a^2 c\cos C}{(c^2 - b^2)\cos A} \quad \overline{\alpha C} = \frac{a^2 b\cos B}{(c^2 - b^2)\cos A}.$$

Rezultă deci:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{c\cos C}{b\cos B}.$$

In mod analog:

$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{a\cos A}{c\cos C} \qquad \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma A}} = \frac{b\cos B}{a\cos A}$$

şi deci:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \times \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \times \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$$

adică α, β, γ *sunt pe polara trilineară a centrului cercului circumscris triunghiului* ABC.

II. *Soluţia a II-a*[1]). Se ştie că:

Dacă considerăm un fascicol de conice homofocale şi un punct fix M, iar A, B contactele tangentelor din M la conicele fascicolului, locul geometric al intersecţiei normalelor în A şi B este o dreaptă Δ, care trece prin diametralul M', opus lui M pe cercul MFF', şi este conjugata dreptei MM' faţă de unghiul FM'F'.

---

1) Ch. Michel, « *Compléments de géométrie moderne* », 1926, pag. 51.

Dacă particularizăm, făcând ca conicele să treacă prin M, atunci intersecţia normalelor în A şi B (confundate în M) devine *centrul de curbură* relativ la M al uneia din conicele fascicolului.

Dreapta Δ uneşte deci centrele de curbură ale celor 2 conice homofocale care trec prin M.

Putem enunţa deci:

Dreapta Δ *care uneşte centrele de curbură ale conicelor ce trec printr'un punct* M *şi au aceleaşi focare* F *şi* F', *trece prin* M', *diametral opus lui* M *pe cercul* MFF' *şi prin conjugatul armonic al intersecţiei lui* MM' *cu* FF', *faţă de* F *şi* F'.

Dacă M este unul din vârfuri, atunci Δ taie BC în conjugatul armonic al punctului unde diametrul lui A taie BC.

Cele trei drepte taie laturile lui ABC *pe polara trilineară a centrului cercului circumscris.*

Observaţiuni. Dacă în cadrul teoremei generale particularizăm punctul M avem alte teoreme interesante.

1°. M *este pe cercul* ABC. Dreptele Δ_a, Δ_b, Δ_c trec toate prin M' diametralul lui M şi taie laturile lui ABC în conjugatele punctelor unde MM' taie acele laturi, adică în picioarele cevienelor polului trilinear al dreptei MM'.

2°. M *este pe cubica lui* DARBOUX. Se cunoaşte teorema [1]:

« *Unind un punct* M *de pe cubica lui* DARBOUX *cu centrele cercurilor* BMC, CMA, AMB, *intersecţiile diametrelor lui* M *cu laturile, ne dau picioarele a 3 ceviene* ».

In acest caz Δ_a, Δ_b, Δ_c taie laturile lui ABC în 3 puncte colineare. Sunt şi alte cazuri interesante.

MAIOR M. I. F.

PROBLEMA 5279. *Să se calculeze suma*

$$S_n = (C_n^0)^2 a_0 + (C_n^1)^2 a_1 + \ldots + (C_n^n)^2 a_n + \ldots$$

în care $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice de ordinul* m, *iar* C_n^i *reprezintă numărul combinărilor a* n *obiecte luate câte* i.

E. VIŞA.

Valoarea sumei din enunţ este

$$\left(\frac{a_0 + a_n}{2}\right) C_{2n}^n$$

---

1) *Curierul Matematic*, Vol. III, pag. 208, problema 193.

şi a fost stabilită de D-l E. VIŞA la pag. 78, Vol. XXIII, *Revista Matematică din Timişoara* la finele articolului întitulat: *Asupra unor însumări.*

MAIOR E. ST. IACOB.

Problema 5279 a fost propusă în Vol XLV, 1939/40 ca aplicaţie a articolului *Asupra unor însumări* publicat tot de D-l E. VIŞA în *Gazeta Matematică*, Vol. XLIV, pag. 517.

S'a primit o bună soluţie dela D-l E. GH. VIJELIE, când era în clasa a VII-a a Liceului militar „Nicolae Filipescu".

Un caz mai general este suma

$$S_m^k = 1^k (C_m^1)^2 + 2^k (C_m^2)^2 + \ldots + m^k (C_m^m)^2$$

propusă de D-l G. D. SIMIONESCU în problema 4887, rezolvată la pag. 378, Vol. XLV.

G-L GH. B.

PROBLEMA 5793. *Să se demonstreze că dreapta lui* GAUSS *a patrulaterului format din laturile unui triunghiu şi o dreaptă* SIMSON *a triunghiului este perpendiculară pe această dreaptă* SIMSON *şi că în acelaşi timp este şi dreaptă* SIMSON *a triunghiului median al triunghiului iniţial.*

ŞT. S. MIHĂIESCU.

Soluţie dată de D-l P. P. DRĂGHICESCU.

Se cunoaşte proprietatea că dreapta lui GAUSS a unui patrulater este perpendiculară pe linia ortocentrelor triunghiurilor formate de laturile aceluiaşi patrulater. Rămâne deci să demonstrăm că această linie a ortocentrelor a unui patrulater format de un triunghiu şi o dreaptă SIMSON corespunzătoare, este paralelă cu această dreaptă SIMSON.

Fie ABC un triunghiu oarecare, P un punct pe cercul ABC; A_1, B_1, C_1 proecţiile acestui punct respectiv pe laturile BC, CA, AB; A'B'C' triunghiul median al triunghiului ABC; H ortocentrul triunghiului ABC, iar H_a, H_b, H_c respectiv ortocentrele triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1.

Va trebui să demonstrăm că dreptele $A_1B_1C_1$ şi $H_aH_bH_c$ sunt paralele.

Se ştie că dreapta lui SIMSON a unui punct în raport cu un triunghiu trece prin mijlocul segmentului ce uneşte punctul cu ortocentrul triunghiului. Ori $A_1B_1C_1$ este dreapta lui SIMSON a punctului P în raport cu fiecare din triunghiurile ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, adică trece prin mijloacele segmentelor $\overline{PH}$, $\overline{PH_a}$, $\overline{PH_b}$, $\overline{PH_c}$ şi este deci paralelă cu $HH_aH_bH_c$.

Fie L, M, N mijloacele segmentelor $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$. Dreapta LMN este dreapta lui GAUSS a patrulaterului format de triunghiul ABC şi dreapta $A_1B_1C_1$. Evident că punctele L, M, N se găsesc pe laturile B'C', C'A', A'B' ale triunghiului median A'B'C', iar perpendicularele în L, M, N respectiv pe B'C', C'A', A'B' sunt concurente în P', mijlocul lui $\overline{PH}$. LMN este deci dreapta lui SIMSON a punctului P', în raport cu triunghiul median A'B'C'.

Notă Primul punct al problemei se deduce imediat ţinând seamă că dreapta lui GAUSS a unui patrulater este paralelă cu axa parabolei înscrisă în acest patrulater, iar dreapta lui SIMSON a unui punct în raport cu un triunghiu este tangenta la vârf a parabolei cu focarul în punctul considerat şi înscrisă triunghiului.

ŞT. S. M.

PROBLEMA 5920. *Să se găsească două numere, unul îndoitul celuilalt, astfel ca la ele să se întrebuinţeze pentru scriere toate cifrele, o singură dată fiecare din ele.*

I. IONESCU.

Fie n un număr şi m dublul său. Trebue să avem simultan:

$$n = abcde \quad \text{şi} \quad m = 2n = fghij.$$

Nu putem lua $e = 0$ căci atunci ar rezulta $j = 0$ şi ar ieşi cifre identice, contrar enunţului. Să dăm anumite valori lui e şi să determinăm, din aproape în aproape, pe celelalte cifre observând ca o cifră întrebuinţată să nu se mai repete.

Pentru prescurtare, ori de câte ori, calculul dă o cifră mai mare ca 10, o vom înlocui cu unităţile ei.

Cu convenţia aceasta pentru $d = 3$, 8 vom pune pentru i dublul său, pe 6 pentru $d = 4$, 9 vom pune $i = 8$, pentru $d = 5$ vom scrie $i = 0$.

Pentru $e = 1$, $j = 2$ putem lua $d = 3$, 4, 5, 6, 7, 8, 9 şi $i = 6$, 8, 0, 4, 6, 8. Nu putem lua $i = 2$, căci avem deja $j = 2$.

Dacă $d = 3$, $i = 6$ rezultă $h = 2c = 0, 4, 8$ cu $c = 5, 7, 4, 9$. Pentru $c = 4$, $h = 8$ rezultă $g = 2b = 0$, $b = 5$ ceea ce nu dă soluție pentrucă nu putem avea $f = 2a + 1$; a și f fiind 7 sau 9.

Pentru $c = 5$, $h = 0$ rezultă $g = 2b + 1 = 7, 9$; $b = 4, 8$. Dacă $b = 4$, $g = 9$ rezultă că nu putem avea $f = 2a$.

Dacă $b = 8$, $g = 7$ rezultă $f = 2a + 1 = 9$, $a = 4$ și se obține astfel soluția:

$$n = 48531 \quad \text{cu} \quad m = 2n = 97062.$$

Pentru $c = 7$, $h = 4$ rezultă $g = 2b+1 = 5, 9$, însă nu avem soluție pentru b. Pentru $c = 9$ $h = 8$ rezultă $g = 2b + 1 = 5$, $b = 7$, de unde reiese imposibilitate pentru a și f. Pentru $d = 4$, $i = 8$ rezultă $h = 2c = 0, 6$, $c = 3, 5$. Pentru $c = 3$, $h = 5$ rezultă $g = 2b = 0$, $b = 5$, $f = 2a + 1$ ceea ce nu dă soluție.

Pentru $c = 5$, $h = 0$ rezultă $g = 2b + 1 = 3, 7$, $b = 3, 6$. Dacă $b = 3$, $g = 7$ nu putem avea $f = 2a$ pentru 6 și 9, dacă $b = 6$, $g = 3$ nu putem avea $f = 2a + 1$ pentru 7 și 9.

Dacă $d = 5$, $i = 0$ rezultă $h = 2c + 1, 3, 7, 9$ cu $c = 3, 4, 6, 8$. Pentru $c = 3$ $h = 7$ rezultă $g = 2b = 6, 8$, $b = 4, 8, 9$. Dacă $b = 4$, $g = 8$ nu putem avea $f = 2a$ pentru 6 sau 9. Dacă $b = 8$, $g = 6$ rezultă $f = 2a + 1 = 9$, $a = 4$ obținând astfel soluția:

$$n = 48351 \quad ; \quad m = 2n = 96702$$

Dacă $b = 9$, $g = 8$ rezultă că nu putem avea $f = 2a + 1$ pentru 4 și 6. Pentru $c = 4$, $h = 9$ rezultă $2b = 6$, $b = 3, 8$. Dacă $b = 3$, $g = 6$ nu putem avea $f = 2a$ pentru 7, 8. Dacă $b = 8$, $g = 6$ rezultă $f = 2a + 1 = 7$, $a = 3$, de unde avem soluția:

$$n = 38451 \quad m = 2n = 76902.$$

Pentru $c = 6$, $h = 3$ rezultă $g = 2b + 1 = 7, 9$, $b = 4, 8$. Dacă $b = 4$, $g = 9$ rezultă $f = 2a = 6$, $a = 3$ de unde soluția:

$$n = 34851 \quad , \quad m = 2n = 60702$$

Dacă $b=6$, $g=3$ rezultă $f=2a+1=9$, $a=4$ de unde soluția

$$n = 46851 \quad , \quad m = 2n = 93702.$$

Dacă $d=7$, $i=4$ rezultă $h=2c+1$, $c=6$ și putem avea $g=2b+1$, pentru 5, 9. Dacă $d=8$, $i=6$ rezultă $h=2c+1$, 5, 7, 9, cu $c=3, 4, 7$. Pentru $c=3$, $h=7$ rezultă $g=2b=0$, $b=5$ $f=2a+1=9$, $a=4$, de unde soluția:

$$n = 45381 \quad , \quad m = 2n = 90762.$$

Pentru $c=4$, $h=9$ $g=2b=0$, $b=5$, $f=2a+1=7$, $a=3$, de unde soluţia:

$$n = 35481 \quad , \quad m = 2n = 70962$$

pentru $c=7$, $h=5$ rezultă $g=2b+1=9$, $b=4$, însă nu putem avea $f=2a$ pentru 0,3.

Dacă $d=9$ $i=8$ rezultă $h=2c+1=3, 5, 7$, $c=3, 6, 7$. Pentru $c=3, 6, 7$. Pentru $c=3$, $h=7$ rezultă $g=2b=0$, $b=5$, însă nu putem avea $f=2a+1$ pentru 4 şi 6.

Pentru $c=6$, $h=3$ rezultă $g=2b+1=5$, $b=7$ însă nu putem avea $f=2a$ pentru 0, 4.

Pentru $c=7$, $h=4$ rezultă $g=2b+1=3$, $b=6$, însă nu putem avea $f=2a+1$ pentru 0,5.

Urmând aceiaşi metodă, dând toate valorile posibile lui e obţinem următoarele 48 soluţii valabile:

$n = 13\,485$; $13\,548$; $13\,845$; $14\,538$; $14\,685$; $14\,835$
$m = 26\,970$; $27\,096$; $27\,690$; $29\,076$; $29\,370$; $29\,670$
$n = 14\,853$; $14\,865$; $15\,486$; $16\,495$; $18\,546$; $10\,645$
$m = 29\,706$; $29\,730$; $30\,972$; $32\,970$; $37\,092$; $37\,290$
$n = 20\,679$; $20\,760$; $20\,793$; $23\,079$; $26\,709$; $26\,907$
$m = 41\,358$; $41\,538$; $41\,586$; $46\,158$; $53\,418$; $53\,814$
$n = 27\,069$; $27\,093$; $27\,309$; $29\,067$; $29\,073$; $29\,307$
$m = 54\,138$; $54\,186$; $54\,618$; $58\,134$; $58\,146$; $58\,614$
$n = 30\,729$; $30\,792$; $30\,927$; $32\,079$; $32\,709$; $32\,907$
$m = 61\,458$; $61\,584$; $61\,854$; $64\,158$; $65\,418$; $65\,814$
$n = 31\,485$; $34\,851$; $35\,148$; $35\,481$; $38\,145$; $38\,451$
$m = 62\,970$; $69\,702$; $70\,296$; $70\,962$; $76\,290$; $76\,902$
$n = 45\,138$; $45\,186$; $45\,381$; $46\,185$; $46\,851$; $48\,135$
$m = 90\,276$; $90\,372$; $96\,762$; $92\,370$; $93\,702$; $96\,270$
$n = 48\,351$; $48\,513$; $48\,516$; $48\,531$; $48\,615$; $48\,651$
$m = 96\,702$; $97\,026$; $97\,032$; $97\,062$; $97\,230$; $97\,302$.

* * *

Problema mai admite şi soluţii formale de două categorii. Soluţii de categoria I la care m şi n au acelaşi număr de cifre,

şi la care n începe cu 0. Avem 12 soluţii de această categorie şi anume:

$n = 06\ 729\ ;\ 06\ 927\ ;\ 06\ 792\ ;\ 07\ 269\ ;\ 07\ 293\ ;\ 07\ 329$
$m = 13\ 458\ ;\ 13\ 854\ :\ 13\ 584\ ;\ 14\ 538\ ;\ 14\ 586\ ;\ 14\ 658$
$n = 07\ 692\ ;\ 0\ 692\ ;\ 07\ 932\ ;\ 09\ 267\ ;\ 09\ 273\ ;\ 09\ 327$
$m = 15\ 384\ ;\ 15\ 846\ ;\ 15\ 864\ ;\ 18\ 534\ ;\ 18\ 546\ ;\ 18\ 654$

Soluţiile formale de categoria a II-a au pe n de patru cifre şi pe m de şase cifre. Aceste soluţii se obţin luând din tabloul precedent pe 0 de la n şi punându-l înaintea lui m. Valoarea lui m la aceste soluţii începe cu 01.

GH. GH. VRÂNCEANU
(Liceul Militar, Târgul-Mureş).

D-l Inginer STELIAN CETĂŢEANU a dat cele 48 soluţii valabile şi prima categorie de soluţii formale. D-sa a observat că soluţiile n=07 269 şi 09 273 au împătritul lor alcătuite cu aceleaşi cifre ca şi dublul lor.

D-l M. V. SOARE a dat 14 soluţii valabile.

D-l C. C. DIACONU luând de bază un studiu al D-lui G-L GH. BUICLIU din *Gazeta Matematică*, Anul XLIX, a găsit 19 soluţiuni valabile.

D-l GH. A. GRIGORE prin cercetări directe a găsit 22 din cele 48 de soluţii valabile.

Un corespondent a găsit 47 soluţii valabile şi formale de categoria I, pe 24 file de câte un sfert de coală, dar a uitat să semneze soluţia!

D-l M. R. CONSTANTINESCU a dat 27 soluţii valabile şi 7 soluţii de formale de categoria I.

Soluţiile formale de categoria I şi II formează obiectul problemei 4512 propusă de D-l V. THÉBAULT cu enunţul următor: *Cu cifrele semnificative luate câte o singură dată, să se scrie două numere aşa ca unul să fie dublul celuilalt.*

Această problemă a fost rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XLI, pag. 498.

Tot D-l V. THÉBAULT a propus şi rezolvat în supliment la revista *Mathesis* 1934, Vol. XLIX o problemă analoagă cu problema 4512 în care cerea ca cele 2 numere să fie de câte 5 cifre iar unul din ele să fie multiplul celuilalt.

PROBLEMA 6046. *In triunghiul* ABC, *purtăm pe înălţimile din* B *şi* C *respectiv segmentele*

$$\overline{BB'} = \overline{BB''} = \overline{AC}\ \ ;\ \ \overline{CC'} = \overline{CC''} = \overline{AB}$$

B', C' *fiind duse către exteriorul triunghiului.*

Să se arate că triunghiurile AB'C', AB"C" *sunt dreptunghice în* A *şi isoscele.*

N. N. MIHĂILEANU.

Soluție dată de D-nii: MIHAI BARBAIANI (liceul A. Vlaicu, București); ION A. BARBU (particular); CRISTU I. CANTUNIAR (liceul T. Maiorescu, București); PETRE D. COLUMBEANU (Colegiul național N. Filipescu, Predeal); MARCEL COTARIU (Politechnica, București); GHEORGHE A. GRIGORE (particular); ALEXANDRU IEȘAN (liceul Matei Basarab, București); MIHAI A. LEON (liceul A. Vlaicu, București); TRAIAN V. MUSTĂCESCU (liceul T. Maiorescu, București); MIRCEA VLAD (clasa a VI-a, liceul militar, Iași).

Triunghiurile ABB', ACC' sunt egale ca având unghiurile din B și C cu laturile perpendiculare și $\overline{AC} = \overline{BB'}$, $\overline{AB} = \overline{CC'}$. Rezultă egalitatea laturilor $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$ și a unghiurilor; atunci

$$\sphericalangle B'AB + \sphericalangle C'AC = \sphericalangle B'AB + \sphericalangle BB'A = \sphericalangle ABB'' = 90^0 - \sphericalangle BAC$$

deci unghiul B'AC' este drept.

Pentru triunghiul AB"C" demonstrație analoagă.

Observații. 1°. Fie $\overline{BD}$ perpendiculară și egală cu $\overline{BC}$ (exterior); triunghiul BDB' este egal cu ABC și cu laturile perpendiculare, deci toate dreptele omoloage sunt egale și perpendiculare; în particular $\overline{AC'}$ și $\overline{B'A}$.

2°. Am mai primit o soluție metrică dela D-l C. S. TĂNĂSESCU (liceul A. Vlaicu, București), una trigonometrică dela D-l T. V. MUSTĂCESCU (liceul T. Maiorescu, București), două analitice dela D-nii: EUGEN CARAMALĂU și MIHAI R. CONSTANTINESCU (liceul Ploești) și două soluții copiate una după alta.

3°. În ultimul timp am mai primit soluții geometrice bune dela D-nii: V. C. BĂRBULESCU, AL. C. BĂRZESCU, I. S. CHIRALEU, C. CORDUNEANU, ȘT. DAMIAN, C. P. DRĂGHICESCU, V. DUMITRESCU, I. V. FILIP, R. I. GONGU, A. V. HUIDEȘ, C. C. ILIESCU, M. MARDARE, L. N. MELINTE, A. MINCULESCU, D. D. NACHE, G. M. NICOLAE, G. D. SÂMBEANU, M. V. SLĂVESCU, C. G. STAN, A. A. TIMOTIN, A. TOFAN, O. G. TOMA, SEGAL ZIGU.

PROBLEMA 6060. *Să se arate că între unghiurile unui triunghiu sferic* ABC *există relația*

$$\sin(A - S) + \sin(B - S) + \sin(C - S) - \sin S = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

unde $2S = A + B + C - \pi$ *este excesul sferic al triunghiului.*

M. GHERMĂNESCU.

Soluție dată de D-nii: MIRCEA BÂRZESCU, CONST. BERDAN, D-TRU NACHE și B. I. POPESCU.

Ținând seama de relația dintre unghiuri, putem scrie

$$\sin(A-S)+\sin(B-S=2\sin\frac{A+B-2S}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$\sin(C-S)-\sin S=2\cos\frac{C}{2}\sin\frac{C-2S}{2}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A+B}{2},$$

astfel că primul membru al relației propuse este egal cu

$$2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Notă. 1°. D-nii C. BERDAN și GH. BRAȘOVEANU au dat o soluție înlocuind $\sin(A-S)$, $\sin S$ cu formulele date la pag. 316 din *Trigonometria plană și sferică* de M. GHERMĂNESCU.

2°. O soluție mai lungă, bazată pe desvoltarea lui $\sin(a+b+c)$, a dat D-l MIHAIL R. CONSTANTINESCU.

3°. D-l C. BERDAN mai semnalează și relația:

$$\sin(A-S)+\sin(B-S)-\sin(C-S)+\sin S=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

și analoagele. Avem impresia că acestea, ca și cea din enunț, sunt cunoscute.

M. G.

PROBLEMA 6062. *Se dau două plane* AB *și* AC *egal înclinate față de planul orizontal cu unghiul* α *și întretăindu-se după orizontala proiectată în* B. *Din* A *se dă drumul unui mobil fără iuțeală, pe planul înclinat* AB. *Mobilul se ciocnește în* B *cu celălalt plan înclinat (coeficient de elasticitate* k) *și sare în punctul* C. *Cât trebue să fie frecarea între mobil și planul* AB, *pentru ca* AB = BC?

GABRIELA ȚIȚEICA.

Soluție. Intrebuințând legea lucrului mecanic pe planul înclinat AB avem:

$$(G \sin\alpha - \mu G \cos\alpha)\, AB = m\frac{v_B^2}{2} - m\frac{v_A^2}{2},\ \mu = \text{coef. de frecare}$$

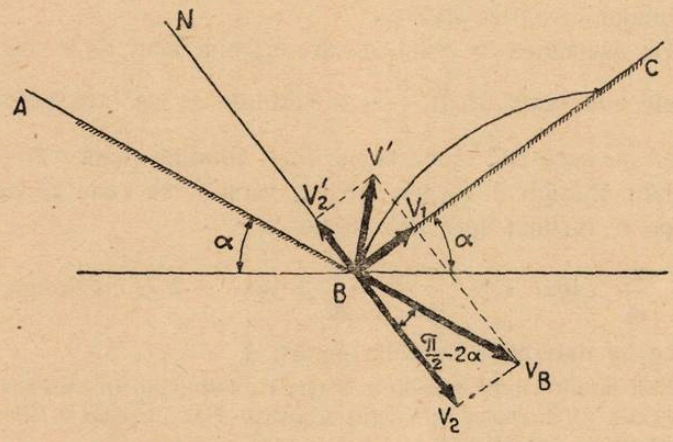
v_A = viteza în A e nulă, $m = \frac{G}{g}$, $AB = s$ deci căpătăm:

$$(1) \qquad v_B^2 = gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

In punctul B mobilul se ciocnește de planul înclinat BC, coeficientul de elasticitate fiind k. Descompunem (fig. 1) vectorul v_B în 2 componente:

v_1 după direcția planului BC și egală cu $v_B \cos 2\alpha$;

v_2 după direcția normalei la planul BC și egală cu $v_B \sin 2\alpha$.



Ținând seama de faptul că ciocnirea e oblică și că v_1 nu se modifică în urma ciocnirei, iar v_2 după ciocnire devine $v_2' = kv_B \sin 2\alpha$ deducem că viteza mobilului după ciocnire devine:

$$v' = v_B \sqrt{k^2 \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}.$$

In B mobilul va avea deci o viteză v' de componente după axele Bx și By (orizontală și verticală):

$$v_x = v_1 \cos\alpha - v_2' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = v_B(\cos 2\alpha \cos\alpha - k \sin 2\alpha \sin\alpha)$$

$$v_y = v_1 \sin\alpha + v_2' \cos\alpha = v_B(\cos 2\alpha \sin\alpha + k \sin 2\alpha \cos\alpha).$$

Pentru coordonatele x şi y ale lui C avem:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{şi} \quad x^2 + y^2 = s^2 \quad \text{căci} \quad BC = s,$$

iar din mişcarea parabolică

$$x = v_x t \qquad y = v_y t - \frac{g}{2} t^2.$$

Făcând calculele necesare şi înlocuind pe v_B cu relaţia (1) găsim pentru μ:

$$\mu = \operatorname{tg} - \frac{1}{2\cos\alpha\,(\sin 2\alpha\cos^2 2\alpha + k\cos 2\alpha\sin 4\alpha - k^2\sin^2 2\alpha) - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\,(\cos 2\alpha\cos\alpha - k\sin 2\alpha\sin\alpha)}$$

Discuţie. Se vede că cele ce preced există numai în cazul $\alpha < \frac{\pi}{4}$. In caz contrar ciocnirea din B nu mai produce o săritură a mobilului în partea BC.

De asemenea în cazul în care unghiul făcut de v' cu planul BC este mai mare decât $\frac{\pi}{2} - \alpha$ săritura se va face spre partea AB, iar nu spre BC. Aceasta ne dă o condiţie pentru k.

Din triunghiul format de v_1, v_2' şi v' se vede că pentru a avea pe v' înclinat spre BC trebue ca

$$\frac{v_1}{v_2'} > \operatorname{tg}\alpha \quad \text{sau} \quad \frac{v_B\cos 2\alpha}{k v_B \sin 2\alpha} > \operatorname{tg}\alpha \quad ; \quad k < \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha$$

ceea ce ne determină condiţia pentru k.

S'au primit soluţii bune dela D-nii: E. WEGENER, Lt. AUREL COJANU, A. I. VARGĂ (Politechnica Bucureşti) şi D-TRU NACHE (clasa a VII-a Liceul Militar Câmpu-Lung, Muscel).

G. Ţ.

PROBLEMA 6089. *Pe o parabolă oarecare se iau* s *puncte* $M_1, M_2, \ldots, M_s$, *ale căror proiecţii ortogonale pe tangenta în vârf formează o serie de ordonate în progresie aritmetică. Să se arate că:*

Dacă s *e par,* $= 2q$, *coardele* M_1M_s, $M_2M_{s-1}, \ldots, M_qM_{q+1}$ *sunt paralele.*

Dacă s *e impar,* $= 2q+1$, *coardele* M_1M_s, $M_2M_{s-1}, \ldots, M_qM_{q+2}$ *sunt paralele cu tangenta în* M_{q+1} *la parabolă.*

P. SERGESCU.

Soluție analitică. Fie $y^2 = 2px$ ecuația parabolei. Coeficientul unghiular al coardei care unește punctele de ordonate y' și y'' este

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y''-y'}{\frac{y''^2}{2p} - \frac{y'^2}{2p}} = \frac{2p}{y'+y''}.$$

El nu depinde decât de *suma* ordonatelor extremităților coardei; toate coardele pentru care suma ordonatelor extremităților e aceeași sunt deci paralele între ele.

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_s$ ordonatele punctelor $M_1, M_2, \ldots, M_S$. Prin enunț câtimile y_i formează o progresie aritmetică; deci sumele ordonatelor echidistante de cele extreme sunt egale între ele

$$y_1 + y_0 = y_2 + y_{s-1} = \ldots$$

Rezultă atunci că coardele $M_1 M_S$, $M_2 M_{S-1}, \ldots$ sunt paralele între ele. Propoziținea este stabilită.

Altă soluție. Să considerăm cazul particular a trei puncte M_1, M_2, M_3. Dacă proiecțiile acestor puncte pe tangenta în vârful parabolei sunt m_1, m_2 și m_3, enunțul problemei presupune

$$m_1 m_2 = m_2 m_3.$$

Cum $m_1 M_1$, $m_2 M_2$, $m_3 M_3$ sunt paralele între ele, ca perpendiculare pe tangenta în vârf, urmează că $m_2 M_2$ taie coarda $M_1 M_3$ în mijlocul ei. Dar se știe că diametrele unei parabole sunt paralele cu axa, adică perpendiculare pe tangenta în vârf. Rezultă că dreapta $m_2 M_2$ trecând prin mijlocul lui $M_1 M_3$ și fiind paralelă cu axa parabolei, e chiar diametrul conjugat direcției $M_1 M_3$. Cum M_2 e intersecția acestui diametru cu parabola, tangenta în M_2 la parabolă are direcția conjugată acestui diametru, adică tocmai direcția $M_1 M_3$. Propoziținea e demonstrată pentru cazul a trei puncte.

Când numărul punctelor e $2q+1$, așa ca proiecțiile lor m_i să formeze o serie de puncte cu ordonatele în progresie aritmetică, e evident că m_{q+1} e la mijlocul lui $m_1 m_{2q+1}$, al lui $m_2 m_{2q}, \ldots$, al lui $m_q m_{q+2}$ (căci suma termenilor echidistanți de extremi e constantă și egală cu dublul termenului din mijloc). Ținând seama de cele arătate în cazul particular precedent, urmează că $M_1 M_{2q+1}$, $M_2 M_{2q}, \ldots, M_q M_{q+2}$ sunt toate paralele cu tangenta în M_{q+1} la parabolă, ceea ce demonstrează cazul s impar.

Dacă $s = 2q$, putem reduce problema la cazul precedent. Intre punctele m_i, m_{i+1} înserăm, la mijlocul fiecărui segment câte un punct m' de pe parabolă. Având $2q$ puncte M_i, sunt $2q-1$ intervale, adică $2q-1$ puncte M_i'. Punctele m_i şi m_i' au ordonatele în progresie aritmetică. Ele sunt în număr de $4q-1$, număr impar, cazul precedent. Ca atare, coardele M_1M_{2q}, $M_1'M_{2q-1}'$, M_2M_{2q-1}, $M_2'M_{2q-2}'$, etc. sunt paralele cu tangenta la parabolă în punctul M_q', adică sunt paralele între ele.

Această problemă a fost sugerată de cunoscuta proprietate a D-lui D. POMPEIU (care corespunde lui $s = 4$): *Dacă patru puncte de pe o parabolă* M_1, M_2, M_3, M_4 *se proiectează în* m_1, m_2, m_3, m_4 *pe tangenta în vârf, aşa ca ordonatele* m_i *formează o progresie aritmetică, figura* $M_1M_2M_3M_4$ *este un trapez.*

S'au primit soluţii bune dela D-nii: MARCEL D. COTARIU, CONST. STAICU, EUG. WEGENER, M. PETCULESCU, AL. AL. TIMOTIN (Politechnica Bucureşti), AL. IEŞAN (Clasa a VIII-a liceul Matei Basarab), I. CHIRALEU (Liceul Sf. Andrei, Bucureşti), IACOB HARGHEL (liceul Giurgiu), A. VARGĂ (student), C. BERDAN, G. G. VRÂNCEANU, P. D. COLUMBEANU, G. T. GOLDIŞ, M. R. CONSTANTINESCU şi ZIGU I. SEGAL.

EXERCIŢII

38. *Să se demonstreze că*

$$1 - \frac{n}{1}t + \frac{n(n-3)}{2!}t^2 - \frac{n(n-5)(n-4)}{3!}t^3 + \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n-2p+1)\ldots(n-p-1)}{p!}t^p = \frac{2^{2n}t^n + (1-\sqrt{1-4t})^{2n}}{2^n(1-\sqrt{1-4t})^n}$$

AD. I. POPESCU.

R. In identitatea

$$(a+b)^n - \frac{n}{1}ab(a+b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}a^2b^2(a+b)^{n-4} -$$

$$\frac{n(n-5)(n-4)}{3!}a^3b^3(a+b)^{n-1} + \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n-2p+2)\ldots(n-1^{p-1}}{p}a^pb^p(a+b)^{n-2p} = a^n + b^n$$

din *Cours d'Algèbre* par B. NIEWENGLOWSKI, Vol. I, pag 85 facem

$$a = \sin^2 x \quad , \quad b = \cos^2 x \quad \text{şi} \quad ab = \sin^2 x \cos^2 x = t$$

şi găsim identitatea din enunţ.

PROBLEME PROPUSE

6129. Să se găsească trei numere întregi ştiind că suma inverselor a două din ele este egală cu inversul celui de al treilea. Generalizare.

I. IONESCU.

6130. Se notează cu T_1 triunghiul AB_1C_1 cu ortocentrul în H. Fie B_1', C_1' picioarele înălţimilor B_1H şi C_1H şi B_2 mijlocul lui B_1C_1, iar C_2 intersecţia lui $B_1'C_1'$ cu B_1C_1. Se notează cu T_2 triunghiul AB_2C_2. Din T_2 se obţine un triunghiu T_3 aşa cum s'a obţinut T_2 din T_1. Se construesc în acelaşi mod triunghiurile T_4, T_5, ... T_n şi se cere: 1°. Să se demonstreze că dreptele $B_1'C_1'$, $B_2'C_2'$, ... $B_n'C_n$ sunt concurente. 2°. Să se găsească locul centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor T_i, când A, H şi poziţia dreptei B_1C_1 rămân fixe.

G-L GH. BUICLIU.

6131. Fie (a, b, c) şi (α, β, γ) două grupe de puncte situate pe o dreaptă Δ. Să se demonstreze relaţia:

$$\overline{ab}\cdot\overline{\gamma\alpha} - \overline{ca}\cdot\overline{\alpha\beta} = \overline{bc}\cdot\overline{\alpha\beta} - \overline{ab}\cdot\overline{\beta\gamma} = \overline{ca}\cdot\overline{\beta\gamma} - \overline{bc}\cdot\overline{\gamma\alpha} = \varepsilon\sqrt{2S\Sigma}$$

$$(\varepsilon = \pm 1)$$

S fiind aria unui triunghiu ale cărui vârfuri se proiectează în a, b, c pe Δ, iar Σ aria triunghiului format de perpendicularele din α, β, γ respectiv pe laturile triunghiului de arie S.

B. BARBĂLAT.

6132. Să se arate că dacă notăm cu S_n suma puterilor a $n - a$ a rădăcinilor ecuaţiei:

$$x^3 - x^2 - 1 = 0,$$

atunci oricare ar fi n, suma:

$$4S_{n+1} + 9S_n + 6S_{n-1}$$

este divizibil cu 31.

N. CIORĂNESCU.

6133. Să se arate cum se poate rezolva ecuaţia

$$\sin(x + 2a) = \sin(x + 2b) + \sin(x + 2c),$$

aducând-o la o formă calculabilă prin logaritmi.

Alicaţie: $a = 39°42'14''$; $b = 20°15'16''$; $c = 8°14'20''$.

G. D. SIMIONESCU.

5134. Știind că a_1, a_2, ... a_n sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, să se calculeze suma:

$$S = \sin a_1 + \frac{\sin a_2}{1!} + \frac{\sin a_3}{2!} + \ldots + \frac{\sin a_n}{(n-1)!} + \ldots$$

A. I. VARGĂ.

6135. Să se determine k în funcție de l astfel ca ecuația

$$x^2 + 2lxy - y^2 - 2ax + k = 0$$

să reprezinte două drepte. Să se găsească apoi ecuația înfășurătoarei acestor drepte, când l variază.

N. ABRAMESCU.

6136. Se consideră un șir $\{a_m\}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ infinit în ambele sensuri, astfel ca să avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-1}^{n} a_{m+i} = b_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Să se demonstreze că șirul

$$\ldots b_{-m}, \ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots b_m, \ldots$$

este o progresie aritmetică.

Să se studieze o problemă analoagă când se ia șirul dublu $\{a_{m,n}\}$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, astfel ca să avem

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2r+1)^2} \sum_{i=-r}^{r} \sum_{j=-r}^{r} a_{m+i,\, n+j} = b_{m,n}.$$

TIBERIU POPOVICIU.

6137. Un lucrător de greutate P încărcat cu o greutate Q cade pe verticală dela o înălțime h. După un timp de cădere t, lucrătorul *asvârle încărcătura pe verticală în jos cu iuțeala* v *în raport cu sine însuși*. Să se arate că prin această manevră lucrătorul *își poate micșora iuțeala cu care se va izbi de pământ*. Rezistența aerului și dimensiile lucrătorului se vor neglija.

ALEXANDRU STOENESCU.

ERATĂ. La problema 6128 din numărul precedent se înlocuește *echinoxul* prin *solstițiul*.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

		Pag.
I. B. Florescu	Relaţii între indicatorii numerici.	58
C-dor I. Linteş . . .	Asupra distribuţiei numerelor prime . . .	113
Tib. Popoviciu . . .	Asupra distribuţiei numerelor prime. . . .	241

2. Geometria

R. Bădescu şi Fl. Bărbulescu	Relaţii matematice în studiul răsturnării brazdei de către plug	338
D. Barbilian	Periodicitatea de ordin şase a triunghiurilor pseudoisoscele	171
P. Boldescu	în legătură cu problemele 4516 şi 5769 . .	410
A. Dobrescu	Asupra unor paralelograme înscrise într'un paralelogram dat	451
Şerb. Gheorghiu . . .	O problemă din geometria triunghiului . .	62
Căpitan I. Zamfirescu .	Poliomologia triunghiului	209

3. Algebra

M. Adam	Asupra inegalităţilor dintre valorile medii .	414
N. Georgescu Roegen .	Rezolvarea în numere întregi a ecuaţiei omogene de gradul al doilea	274, 305
M. Ghermănescu . . .	O proprietate funcţională, comună cercului şi spiralei logaritmice	246
D. V. Ionescu	Rezolvarea unui sistem de ecuaţii	213
I. V. Măteş	Discuţia şi separarea rădăcinilor ecuaţiilor pseudoreciproce	455

4. Geometria analitică şi infinitezimală

N. Abramescu	Proprietăţi ale vârfurilor unui tetraedru în raport cu ariile feţelor care trec prin aceste vârfuri	66

Pag.

C. Borş . . . . . Asupra unei probleme de geometrie . . . 116
V. Ghiţescu . . . . . Asupra unei chestiuni de examen 26
C. Ionescu-Bujor . . . . Asupra triunghiurilor triomologice şi tetraedrelor tetraomologice 279

5. **Mecanica**

V. Vâlcovici . . . . . O generalizare a identităţii lui LAGRANGE . 122

6. **Diverse**

Comitetul de iniţiativă . Al treilea congres al matematicienilor Români. 449
Gazeta Matematică . . . O donaţie 273
Gazeta Matematică . O scrisoare dela D-l T. CONSTANTINESCU . 337
I. Ionescu . . . . . Erorile de tipar în cărţile de matematică . 373

7. **Necrologuri**

Cr. Mateescu . . . . . † BARBU SERGESCU 57

B. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. **Diverse**

*** . . . . . Lista membrilor societăţei *Gazeta Matematică* 5
*** . . . . . Membri decedaţi 22

2. **Premii şi concursuri**

Al. Al. Roşu, D. A. Stan Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii *Gazeta Matematică* 23
Al. Bunescu, Maior Ed. Dragomirescu-Buzne, Cpt. A. Stan . . . . Raport pentru acordarea premiului General SCARLAT PANAITESCU 32
Delegaţia Societăţii . . Concursul *Gazeta Matematică* din 1945 . 127, 249
Gh. Th. Gheorghiu, D. V. Ionescu, P. Sergescu . Raport asupra premiului „Ing. H. CAPRIEL“ 131
I. I. Chiţulescu, O. Onicescu, P. Sergescu . . Raport pentru decernarea premiului „V. CONTA“ 131
Al. Bunescu, I. Chiţulescu, P. Sergescu . . . . . Propuneri pentru comemorarea a 50 ani de viaţă a *Gazetei Matematice* 169
C. Ionescu-Bujor . . . . Raport pentru decernarea premiului „N. BOTA“ 218

		Pag.
G-l Gh. Buicliu, I. Ionescu, P. Sergescu	Raportul comisiunei pentru premiul de aritmetică	284
Al. Al. Roşu, P. Sergescu, D. Stoica	Premiul „Ing. AL. ROŞU"	112
D. Barbilian, Al. Pantazi, P. Sergescu	Premiul „Ing. H. CAPRIEL"	345
V. Alaci, Th. Angheluţă, Al. Bunescu	Raport pentru acordarea premiului de algebră	348
Gh. D. Simionescu	Rezultatul concursului *Gazeta Matematică* din 1945	369
Al. V. Niculescu, P. Sergescu, Gh. D. Simionescu	Raport asupra premiului „V. CRISTESCU"	382
Al. Bunescu, Ş. Gheorghiu, P. Sergescu	Informaţiuni cu privire la semicentenarul *Gazetei Matematice*	409
Gabriela Ţiţeica, O. N. Ţino, P. Sergescu	Raport asupra premiului „G. ŢIŢEICA"	424
Al. Bunescu, Al. Stoenescu, Gabriela Ţiţeica.	Raportul pentru decernarea premiului „Spiru-Haret"	462

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

44.	*G-l Gh. Buicliu*	Asupra problemei 4550	463
8[1])	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	132
21.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	285
28.	*G-l Gh. Buicliu*	Numere interesante cu 10 cifre diferite	384
1.	*P. P. Drăghicescu*	Notă asupra egalităţilor multigrade	33
9.	*I. B. Florescu*	Asupra indicatorilor	133
25.	*C-dor I. Linteş*	Asupra notei 32 din *Gazeta Matematică*, Vol. XLVIII	348
2.	*C-dor I. Linteş*	Asupra problemei 3341	34
17.	*C-dor I. Linteş*	Asupra problemei 5692	220
5.	*C-dor I. Linteş*	Asupra unei probleme a lui LAISANT	72
	C-dor I. Linteş	O observaţie asupra unor probleme cu numere prime	425
19.	*I. V. Mătieş*	Numărul terminaţiunilor distincte ale cuburilor perfecte	250
41.	*T. Popoviciu*	Asupra unui articol	425

1) In această coloană sunt trecute numerele de ordine ale notelor din Vol. L.

Pag.

2. Geometria

24. *D. Barbilian* . . . . Asupra articolului „*Poliomologia triunghiurilor oare care*“ 113
20. *D. Barbilian* . . . . Reconstituirea unei soluţii 253
22. *M. D. Cotariu* . . . Relaţii cu bisectoarele interioare ale unui triunghiu 286
26. *A. Dobrescu* . . . . Notă despre centrele izodinamice 349
6. *P. P. Drăghicescu* . Notă din geometria triunghiului 73
29. *N. Gaiu* . . . . . Patru proprietăţi ale cubului 385
43. *C. Ionescu-Bujor* . . Asupra articolului „*Generalizarea teoremei lui* Droz-Farny“ 423
14. *M. D. Popa* . . . . Asupra problemei 2585 184

3. Algebra

42. *I. S. Antoniu* . . . . Asupra problemei 3610 427
46. *M. Ghermănescu* . . O proprietate funcţională comună cercului şi spiralei logaritmice 466
45. *N. N. Mihăileanu* . . Asupra exerciţiului 58, cap. XIV din *Culegere de probleme de Algebră* 464
10. *N. N. Mihăileanu* . . Notă asupra transformărei ecuaţiei de gradul al doilea 135
23. *N. N. Mihăileanu* . . Notă asupra unor identităţi. 287

4. Trigonometria

11. *M. R. Constantinescu*. Asupra exerciţiului 18 din *Gazeta Matematică*, Vol. XLIX, pag. 375 135

5. Geometria analitică

18. *Otilia Georgescu Roegen* . . . . . Asupra problemei 4879. 221
Şerban Gheorghiu . O problemă de concurs 464
3. *C. Ionescu-Bujor* . . Asupra unei omologii plane 35

6. Analiza şi Calculul integral.

48. *M. D. Popa*. . . . . Asupra problemei 2578 467

7. Mecanica

7. *P. Postelnicu* . . . Compunerea vectorilor 74

8. Balistica

15. *C-dor I. Linteş* . . . Asupra problemei 5603 184

Pag.

9. Istoria Matematicilor

13. *P. P. Drăghicescu* . . Asupra numerelor amiabile 183
27. *P. P. Drăghicescu* . . Un filozof Român din sec. XVII : G. IVUL . 383
4. *I. Ionescu* . . . . . Asupra numerelor amiabile 72

10. Diverse

16. *I. Ionescu* . . . . . Variaţia suprafeţei perimetrelor 219

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul *Gazetei Matematice* din 1945. Lucrare scrisă. . . . 351, 387, 428
Politechnica din Bucureşti. Examen de admitere 136, 255, 315, 468

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări şi reviste recenzate

D. Barbilian . . . . . GH. VRÂNCEANU. Curs de geometrie analitică şi proiectivă. 186
M. Ghermănescu . . . . Le Général V. NEGREI. Le dernier théorème de FERMAT 256
I. Ionescu. . . . . M. GHERMĂNESCU. Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţiuni la geometria analitică, mecanică, astronomie, topografie, etc. . . 316
P. Sergescu. . . . . N. ABRAMESCU. Lecţiuni de geometrie analitică 37

2. Lucrări nerecenzate

Dr. Ing. A. Avramescu . Beiträge zur Erwärmungsberechnung electrischer Leiter 224
C-Amiral C. Boerescu. . Din minunile naturei 469
Contra-Amiral C. Boerescu Mişcările corpului în spaţiu 38
G-l St. Burileanu . . . . Curs de mecanică raţională. Vol. I. Cinematica. 186
G-l St. Burileanu . . . . Curs de mecanică raţională. Vol. II. Dinamica. 186
T. Vescan . . . . . Memoriu de titluri şi lucrări 76

3. Extrase, Suplimente, Teze

Dr. Ing. C. Avramescu . Clasificarea decimală privind producţia şi distribuţia energiei 138
Dr. Ing. C. Avramescu . Redactarea unitară a articolelor technice. . 138
C. Budeanu. . . . . Systèmes électromagnétiques symétriques et le système KALANTAROV 430
Şerban Gheorghiu. . . . Sur la théorie de l'équilibre économique. . 224
M. Ghermănescu . . . . Sur quelques équations fonctionnelles de Mr. D. POMPEIU. 288

		Pag.
C-dor I. Linteş	Sur la balistique des lances flammes . . .	38
I. V. Mătieş	Contribuţii la rezolvarea congruenţelor de gradul *n* şi ordinul *p*	353
I. V. Mătieş	Cuburi izofinale	353
V. Vâlcovici	Sur la distribution des axes principeaux d'inertie	186

4. Reviste, Periodice

Buletinul Politechnicei din Bucureşti 185, 223
Buletinul Societăţei Politechnice din România 223
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 429
Bulletin séismique 137, 185
Disquisitiones Mathematicae et Physicae 185
Mathematica 223
Revista Matematică din Timişoara 37, 76, 137, 185, 224, 256, 288, 316, 353, 429, 469
Revista ştiinţifică „V. ADAMACHI" 37, 224, 391, 429
România aeriană 37, 185, 224, 288, 391, 469
Ştiinţă şi Progres 391

F. CERERI [1])

Nr. cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul	*Nr. cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1 . . .	24 (XXI)	?	31 . . .	277 (XXII)	?
4 . . .	24 „	?	32 . . .	277 „	259 (XXIII)
5 . . .	24 „	?			39, 186 (XXIV) ?
7 . . .	59 „	?	33 . . .	308 „	?
8 . . .	59 „	?	34 . . .	40 (XXIII)	?
10 . . .	91 „	?	35 . . .	40 „	?
11 [2]) . .	144 „	?	36 . . .	65 „	?
12 . . .	145 „	?	37 . . .	86 „	211 (XXII) ?
13 . . .	145 „	219 (XXI) ?	38 . . .	112 „	?
14 . . .	183 „	?	39 . . .	137 „	?
15 . . .	219 „	?	40 . . .	157 „	?
16 . . .	254 „	?	41 . . .	185 „	?
17 . . .	294 „	264 (XXXVIII) ?	42 . . .	211 „	?
			43 . . .	235 „	?
20 . . .	420 „	?	44 . . .	259 „	?
23 . . .	17 (XXII)	?	45 . . .	275 „	?
24 . . .	75 „	?	46 . . .	13 (XXIV)	?
26 . . .	161 „	?	49 . . .	57 „	?
27 . . .	187 „	?	50 . . .	70 „	?
28 . . .	213 „	?	51 . . .	88 „	?
29 . . .	231 „	?	52 . . .	103 „	?
30 . . .	258 „	?	55 . . .	168 „	?

1) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns. Litera A înseamnă că răspunsul trebue trimis autorului cererii.

2) A se vedea nota matematică dela pag. 249, Vol. XLVI.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
56 . . .	168 (XXIV)	?
58 . . .	16 (XXV)	?
59 . . .	36 „	?
60 . . .	58 „	?
61 . . .	58 „	?
63 . . .	71 „	?
64 . . .	122 „	?
65 . . .	122 „	?
66 . . .	155 „	?
67 . . .	175 „	?
68 . . .	199 „	?
70 . . .	223 „	?
71 . . .	251 „	?
73 . . .	45 (XXVI)	?
74 . . .	45 „	?
75 . . .	94 „	?
77 . . .	198 „	?
78 . . .	227 „	?
80 . . .	263 „	?
81 . . .	27 (XXVII)	?
82 . . .	27 „	160 (XXVII) ?
83 . . .	160 „	?
84 . . .	197 „	?
85 . . .	197 „	?
86 . . .	240 „	?
87 . . .	283 „	?
88 . . .	329 „	?
89 . . .	361 „	?
92 . . .	57 (XXVIII)	?
93 . . .	57 „	?
95 . . .	136 „	?
96 . . .	136 „	?
97 . . .	213 „	?
98 . . .	213 „	?
100 . . .	297 „	?
101 . . .	342 „	?
102 . . .	458 „	?
103 . . .	458 „	?
104 . . .	24 (XXIX)	?
105 . . .	58 „	?
107 . . .	145 „	?
108 . . .	226 „	?
109 . . .	298 „	?
112 . . .	419 „	?
113 . . .	454 „	?
115 . . .	22 (XXX)	?
116 . . .	102 „	?
117 . . .	102 „	?
118 . . .	140 „	?
119 . . .	218 „	?
120 . . .	261 „	?
122 . . .	306 „	?
123 . . .	337 „	?
124 . . .	383 „	?

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
126 . . .	423 (XXX)	?
128 . . .	33 (XXXI)	?
129 . . .	55 „	?
130 . . .	56 „	?
131 . . .	100 „	?
134 . . .	184 „	?
142 . . .	53 (XXXII)	?
143 . . .	102 „	?
144 . . .	142 „	?
146 . . .	216 „	?
148 . . .	296 „	?
149 . . .	343 „	?
152 . . .	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153 . . .	51 „	?
154 . . .	51 „	?
157 . . .	146 „	?
158 . . .	185 „	?
159 . . .	217 „	?
162 . . .	295 „	?
163 . . .	341 „	?
166 . . .	457 „	?
179 . . .	385 (XXXIV)	?
181 . . .	24 (XXXV)	?
186 . . .	216 „	?
193 . . .	466 „	?
196 . . .	57 (XXXVI)	?
201 . . .	221 „	?
207 . . .	414 „	?
208 . . .	462 „	?
210 . . .	62 (XXXVII)	?
211 . . .	98 „	?
212 . . .	137 „	?
214 . . .	217 „	?
215 . . .	260 „	?
219 . . .	425 „	?
220 . . .	448 „	?
223 . . .	94 (XXXVIII)	?
227 . . .	57 (XXXIX)	?
235 . . .	222 „	?
237 . . .	360 „	?
238 . . .	409 „	?
239 . . .	458 „	?
243 . . .	212 (XL)	?
244 . . .	266 „	?
245 . . .	309 „	?
247 . . .	499 „	?
248 . . .	553 „	?
250 . . .	148 (XLI)	?
251 . . .	189 „	?
252 . . .	241 „	?
253 . . .	292 „	?
254 . . .	343 „	?
255 . . .	384 „	?
256 . . .	485 „	?

Nr. cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
257	533 (XLI)	?
259	629 „	?
262	251 (XLII)	?
263	307 „	?
264	368 „	?
265	422 „	?
266	530 „	?
267	588 „	?
268	639 „	?
270	90 (XLIII)	?
271	138 „	?
273	255 „	?
274	304 „	?
275	423 „	?
276	477 „	?
277	539 „	?
279	639 „	?
280	32 (XLIV)	?
284	479 „	?
289	248 (XLV)	?
290	306 „	?
291	419 „	?
292	479 „	?
294	530 „	?
296	638 „	?
297	205 (XLVI)	?
298	254 „	?
299	315 „	?
301	483 „	?
302	534 „	?
303	583 (XLVI)	?
304	641 „	?
305	30 (XLVII)	?
306	135 „	?
307 [1])	171 „	?
308	221 „	?
310	373 „	?
311	373 „	?
313	518 „	?
315	564 „	?
316	30 (XLVIII)	?
317	71 „	?
318	166 „	?
319	414 „	?
320	454 „	?
321	511 „	?
323	87 (XLIX)	. . . 391
325	243 „	?
326	299 „	?
327	346 „	?
328	434 „	?
329	508 „	?
330	569 „	?
331	611 „	?
332	677 „	. . . 317
333	732 „	?
334	288 (L)	. 354, 430
335	317 „	?
336	469 „	?

G. DIVERSE

Adunările societăţii *Gazeta Matematică* 288, 318
Donaţia elevilor gimnazului din Tg.-Ocna 470
Lista membrilor societăţii *Gazeta Matematică* 76
Redacţionale 138, 225, 288, 354, 430
Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică* 38, 76, 138, 188, 225, 288, 318, 354, 392, 430, 470

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea pe materii a problemelor propuse în acest volum

Aritmetica şi teoria numerelor . . 6006, 7, 21, 2, 3, 4, 8, 36, 7, 8, 50, 1, 2, 3, 4, 65, 6, 74, 5, 84, 5, 90, 2, 3, 101, 2, 3, 11, 20, 1, 29, 30.

---

1) La pag. 171, Vol. XLVII a fost propusă cu numărul greşit 306.

Geometria . . . . . 6013, 4, 5, 6, 27, 9, 30, 1, 45, 6, 55, 6, 67, 76, 83, 94, 5, 104, 5, 6, 13, 4, 5, 7, 22, 3, 31, 2.
Algebra . . . . . 6009, 10, 2, 25, 6, 8, 39, 41, 2, 3, 57, 8, 9, 68, 9, 77, 8, 80, 6, 7, 96, 107, 18, 24, 27, 33, 5.
Trigonometria . . . . . 6011, 40, 7, 60, 70, 9, 88, 97, 8, 112, 6, 25, 34, 5.
Geometria analitică . . . . . 6032, 3, 4, 44, 8, 61, 71, 2, 81, 99, 108, 26, 34.
Mecanica . . . . . 6018, 9, 20, 35, 9, 62, 3, 73, 82, 109, 10, 36.
Analiza şi calculul integral . . . 6017, 64, 89, 100, 19.
Astronomie . . . . . 6128.

b) Repartizarea pe autori a problemelor propuse în acest volum

N. Abramescu. . . . 6017, 80, 135
M. Adam 6069, 77
I. S. Antoniu. 6047, 116
R. Bădescu 6029
B. Barbălat 6207, 31
D. Barbilian 6095
G-l Gh. Buicliu. . 6015, 33, 9, 51, 67, 74, 85, 99, 101, 11, 21, 30
N. Ciorănescu 6132
Th. Gh. Cocea 6144
M. R. Constantinescu 6088
C. V. Costăchescu. 6128
M. D. Cotariu 6004
P. P. Drăghicescu 6031, 83
I. B. Florescu . . 6008, 23, 38, 54
Maior M. I. Focşeneanu. . . 6108
N. Gaiu 6013
N. Georgescu Roegen 6096
Şerban Gheorghiu . . 6016, 32, 48, 64, 78, 90, 100, 15, 26.
M. Ghermănescu . 6011, 28, 40, 60, 70, 9, 91, 8, 110, 7, 30.
V. Ghiţescu 6029, 124
A. Gloden 6022
I. Ionescu . . 6006, 21, 50, 106, 29
C. Ionescu-Bujor 6010, 34, 61, 71, 81
C-dor I. Linteş. . 6007, 24, 37, 53, 66, 109.
I. V. Măties 6052, 102
Şt. S. Mihăiescu 6123
N. N. Mihăileanu . . 6009, 26, 46, 57, 68, 86, 104.
C. C. Mihăilescu 6036
I. Murăroiu 6018
M. D. Popa 6072
Ad. I. Popescu 6125
Maior I. Popescu 6043
Tib. Popoviciu. . 6012, 25, 42, 59, 75, 84, 93, 103, 19, 27, 36.
P. Sergescu 6089
G. D. Simionescu . 6044, 58, 99, 133
I. I. Stamate 6041, 87, 112
Cpt. A. Stan . . 6056, 97, 113, 22
Al. Stoenescu . . 6035, 49, 63, 73, 82, 137
V. Thébault. . 6030, 45, 55, 76, 120
O. N. Ţino 6027
A. I. Vargă. 6134
M. Al. Vasilescu-Ştabu . . . 6065
E. N. Wegener 6105
Cpt. I. Gh. Zamfirescu . . . 6014

c) Indicarea paginei la care problemele au fost propuse sau rezolvate

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
485 [3])	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 [4])	172 (VI), 238 (XVI)	NR
676	148 (VII)	
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
1000 [5])	220 „, 438 „	NR
1056	100 (XI)	NR
1146 [6])	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1398	224 „	NR
1450	352 „	
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	. . . 188
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	
1656	239 „	. . . 354
1676	279 „	
1702	360 „	
1711	399 (XVI), 372 (XXXI)	
1735 [7])	464 (XVI)	
1753	80 (XVII)	NR
1764 [8])	120 „	NR
1790	240 „	NR
1823	400 „	NR
1831	439 „	NR
1835	440 „	
1840	466 „	
1898	199 (XVIII)	
1914 [9])	239 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1944	319 „	
1945 [10])	320 „	
1969	399 „	. . . 258
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2038	159 „	
2048	198 „	NR
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2065	239 „	
2070 [11])	240 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2106	358 „	

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul şi la pagina respectivă.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte probleme redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

3) Vezi erata pag. 128, Vol. V.

4) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88. Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii. A se vedea *articolul* dela pag. 402, Vol. XLIV.

5) A se vedea lămuriri la pag. 291, Vol. XXXI.

6) A se vedea nota matematică dela pag. 634, Vol. XLVI, în baza căreia problema rămâne nerezolvată, soluţia dela pag. 77 neräspunzând adevăratei înterpretări a enunţului.

7) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

8) Pentru definiţia momentelor statice polare, a se vedea G. M., Vol. XVII, pag. 87.

9) Vezi erata pag. 280, Vol. XVIII.

10) Vezi erata pag. 360, Vol. XVIII.

11) Vezi erata pag. 280, Vol. XIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2108 . . .	359 (XIX)	
2110 . . .	359 „	
2118 . . .	399 „	
2133 . . .	439 „	
2147 . . .	462 „	
2170 . . .	119 (XX)	NR
2176 . . .	120 „	
2197 . . .	198 „	
2217 . . .	239 „	
2222 [1]) . .	240 „	
2227 . . .	279 „	
2235 . . .	280 „	
2240 . . .	318 „	
2246 [2]) . .	320 „	
2247 . . .	320 „	
2248 . . .	320 „	
2249 . . .	320 „	
2263 . . .	359 „	
2264 . . .	360 „	
2265 . . .	360 „	
2266 . . .	360 „	
2274 . . .	398 „	
2284 . . .	439 „	
2290 . . .	439 „	
2301 . . .	462 „	
2302 . . .	462 „	NR
2311 . . .	40 (XXI)	
2332 . . .	119 „	
2338 . . .	120 „ / 422 (XXXI)	NR
2343 . . .	157 (XXI)	
2344 . . .	158 „	
2357 . . .	199 „	
2365 . . .	200 „	
2370 . . .	239 „	
2375 . . .	240 „	
2381 [3]) . .	278 „	. . . 358
2422 . . .	399 „	
2423 . . .	399 „	
2430 . . .	439 „	NR
2435 . . .	440 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2436 . . .	440 (XXI)	
2462 . . .	62 (XXII)	
2466 . . .	63 „	
2477 . . .	95 „	
2497 . . .	144 „	
2500 . . .	144 „	
2537 . . .	287 „	NR
2539 . . .	288 „	
2553 . . .	47 (XXIII)	
2569 . . .	120 „	
2573 . . .	144 „	
2586 . . .	216 „	
2591 [4]) . .	240 „	
2593 . . .	264 „	
2599 . . .	288 „	
2602 [5]) . .	318 (XXXI)	
2609 [6]) . .	32 (XXIV)	NR
2631 . . .	112 „	
2638 . . .	127 „	NR
2645 . . .	143 „	
2655 . . .	191 „	NR
2660 . . .	191 „	
2664 . . .	24 (XXV)	
2665 . . .	24 „	
2675 . . .	63 „	
2684 . . .	80 „	
2688 . . .	80 „	
2692 [7]) . .	108 „	
2713 . . .	143 „	
2731 . . .	191 „	
2752 . . .	264 „	
2758 . . .	56 (XXVI)	
2769 . . .	79 „	
2778 . . .	104 „	
2789 . . .	135 „	
2814 . . .	192 „	NR
2818 . . .	216 „	
2820 . . .	216 „	
2822 . . .	216 „	
2827 . . .	247 „	
2850 . . .	335 „	

1) Pentru calculul determinantului din enunț a se vedea articolul dela pag. 126, Vol. XX şi nota dela pag. 172, Vol. XX.

2) Soluția dela pag. 262, Vol. XXI nefiind exactă, se așteaptă o nouă soluție. — Pentru îndrumare a se vedea nota dela pag. 109, Vol. XLVII şi observarea dela pag. 112, Vol. XLVIII.

3) Vezi articolul dela pag. 77 şi 101, Vol. IX şi probema 3104, rezolvată la pag. 64. Vol. XXXI.

4) A se vedea punctul 4° pag. 244, Vol. XXXVIII şi punctul 9° pag. 441, Vol. XXXIX.

5) Inlocueşte problema 2602 propusă la pag. 16, Vol. XXIV.

6) Soluția dată la pag. 458, Vol. XXXIX nefiind satisfăcătoare, se așteaptă o nouă soluție la această problemă.

7) Vezi erata pag. 144, Vol. XXV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
2865 [1]) . .	70 (XXVII)	. . 392
2886 . . .	104 „	NR
2909 . . .	221 „	
2912 . . .	222 „	NR
2922 . . .	263 „	
2926 [2]) . .	264 „	NR
2936 . . .	343 „	NR
2947 [3]) . .	376 „	. . . 259
2955 . . .	416 „	
2969 . . .	39 (XXVIII)	
2971 . . .	39 „	
2983 . . .	79 „	
2985 . . .	80 „	
2993 . . .	119 „	
2999 . . .	120 „	
3000 . . .	120 „	
3003 . . .	159 „	
3005 . . .	159 „	
3013 . . .	199 „	
3054 . . .	360 „	
3070 . . .	400 „	
3071 . . .	439 „	
3073 . . .	439 „	
3085 [4]) . .	480 „	
3086 . . .	480 „	
3091 . . .	39 (XXIX)	
3095 . . .	40 „	
3108 . . .	80 „	
3118 . . .	120 „	
3134 [5]) . .	199 „	
3150 . . .	240 „	
3161 . . .	318 „	NR
3173 . . .	358 „	
3177 . . .	359 „	
3178 . . .	360 „	
3180 . . .	360 „	
3189 . . .	400 „	
3198 . . .	440 „	
3220 . . .	40 (XXX)	
3227 . . .	80 „	
3230 . . .	80 „	
3232 . . .	119 „	
3239 . . .	120 „	
3245 . . .	160 „	
3249 . . .	160 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3255 . . .	199 (XXX)	NR
3260 . . .	200 „	
3267 . . .	239 „	
3277 . . .	280 „	
3287 . . .	320 „	
3288 . . .	320 „	NR
3296 . . .	359 „	
3298 . . .	359 „	NR
3304 . . .	399 „	NR
3308 . . .	400 „	
3309 . . .	400 „	
3310 . . .	400 „	NR
3311 . . .	438 „	
3312 . . .	439 „	
3316 . . .	439 „	NR
3318 . . .	440 „	NR
3320 . . .	440 „	
3340 . . .	40 (XXXI)	
3360 . . .	120 „	. . . 310
3389 . . .	240 „	
3405 . . .	319 „	
3412 . . .	358 „	NR
3419 . . .	360 „	
3424 . . .	399 „	NR
3425 . . .	399 „	
3429 . . .	400 „	
3430 . . .	400 „	. . . 431
3439 . . .	440 „	
3445 . . .	479 „	
3448 . . .	479 „	
3457 . . .	39 (XXXII)	
3459 . . .	40 „	
3467 [6]) . .	79 „	
3468 . . .	80 „	
3472 . . .	80 „	
3474 . . .	119 „	
3488 . . .	159 „	
3493 . . .	160 „	
3495 . . .	199 „	
3499 . . .	199 „	
3506 . . .	239 „	
3512 . . .	240 „	
3513 . . .	240 „	
3521 . . .	279 „	
3522 . . .	280 „	NR

1) Un caz este cuprins în problema 5181, rezolvată la pag. 224, Vol. XLVIII. Vezi şi problema 5996, propusă la pag. 762 Vol. XLIX.

2) Vezi erata pag 360, Vol. XXXIII.

3) Vezi rectificarea pag. 448, Vol. XLIII.

4) Vezi problema analoagă 3155 rezolvată la pag. 192 Vol. XXXI.

5) A se vedea soluţia parţială dela pag. 254 şi nota dela pag. 300, Vol. XLII. Se aşteaptă completarea soluţiei.

6) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3523	280 (XXXII)	
3533	320 „	
3535	359 „	NR
3536 [1])	438 „	NR
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3551 [2])	39 (XXXIII)	NR
3572	480 (XXXII)	NR
3584	79 (XXXIII)	
3589	80 „	
3597	120 „	
3607 [3])	159 „	
3620	199 „	
3622 [4])	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	
3632 [5])	279 „	
3640 [6])	280 „	
3644	319 „	
3653	359 „	NR
3657	359 „	
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3677	440 „	
3681 [7])	478 „	
3682	478 „	
3689	480 „	NR
3693	39 (XXXIV)	
3699	40 „	
3700	40 „	NR
3706	79 „	
3713 [8])	119 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3736	200 „	
3749	240 „	
3762	319 „	
3764	319 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
3768	320 (XXXIV)	
3772	359 „	
3780	360 „	
3784	399 „	. . . 261
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR
3804	479 „	
3807	480 „	
3808 [9])	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	. . . 431
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3836	120 „	NR
3844	159 „	NR
3849	160 „	
3853	199 „	
3863	239 „	NR
3864	239 „	
3867	240 „	
3874	38 (XXXVIII)	. 470
3876	279 (XXXV)	
3880	280 „	
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3909	400 „	NR
3913	439 „	. . . 77
3933	39 (XXXVI)	. 432
3934	39 „	
3939	40 „	
3950	80 „	
3975	200 „	
3976	200 „	
3983	238 „	
3999	280 „	

1) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIII.

2) Inlocueşte enunţnl dela pag. 399, Vol. XXXII.

3) Vezi erata pag. 240, Vol. XXXIII.

4) Vezi erata pag. 280, Vol. XXXIII.

5) Problema rezolvată la pag. 95, Vol. XLII este 3630, iar nu 3632. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

6) Problema rezolvată la pag. 35, Vol. XLII este 3639, iar nu 3640. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

7) Pentru rezolvare a se vedea articolul dela pag. 161, Vol. XXX şi problema 1128 rezolvată la pag. 306 Vol. XXXV.

8) A se vedea erata dela pag. 672, Vol. XLVI.

9) A se vedea completarea enunţului la pag. 288, Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4010	320 (XXXVI)	
4013	359 „	NR
4022	398 „	
4028	400 „	
4030	400 „	
4035	440 „	
4041 [1])	38 (XXXVIII)	
4045	479 (XXXVI) / 142 (XL)	NR
4053 [2])	39 (XXXVII)	
4056	79 „	
4059	40 „	
4060	40 „	
4067	80 „	
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4096	200 „	
4102	239 „	
4104	239 „	NR
4105	240 „	
4107	240 „	
4111 [3])	279 „	NR
4112	279 „	NR
4118	280 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	
4148 [4])	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4155	439 „	
4167	479 „	NR
4169	480 „	NR
4172	39 (XXXVIII)	
4184	79 „	
4185	79 „	
4194	119 „	
4199	120 „	
4206	160 „	NR
4210	160 „	
4214	198 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4234	279 (XXXVIII)	
4236	280 „	
4245	319 „	
4249	320 „	NR
4250 [5])	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4270	400 „	
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	
4283 [6])	479 „	. . . 318
4285 [7])	479 „	
4287	480 „	
4289	480 „	
4290 [8])	383 (XXXIX)	NR
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4307	79 „	
4316	120 „	
4319	120 „	NR
4326	159 „	
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	NR
4340	200 „	NR
4350	240 „	
4352	286 „	
4356	287 „	
4358	288 „	NR
4360	334 „	
4363	335 „	NR
4370	336 „	
4373	383 „	
4380	384 „	NR
4384	431 „	NR
4393	478 „	
4395 [9])	479 „	NR
4399	480 „	NR
4402	480 „	
4404	526 „	
4407	527 „	
4411	528 „	

1) Inlocueşte enunţul dela pag. 479, Vol. XXXVI. A se vedea problema rezolvată la pag. 29, Vol. XXXIX şi erata 1) dela pag. 80, Vol. XXXIX.
2) Vezi erata pag. 120, Vol. XXXVIII.
3) Vezi lămuriri la pag. 499, Vol. XLIX.
4) Vezi erata pag. 200, Vol. XXXVIII.
5) Inlocueşte problema 4250 dela pag. 480 Vol. XXXVIII.
6) Vezi erata pag. 160, Vol. XXXIX
7) Vezi erata pag. 40, Vol. XXXIX.
8) Inlocueşte problema 4290 dela pag. 380 Vol. XXXVIII.
9) Vezi erata pag. 48, Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4416 . . .	46 (XL)	
4426 . . .	48 „	
4435 . . .	96 „	
4445 . . .	143 „	
4446 . . .	143 „	
4449 . . .	144 „	NR
4450 . .	144 „	
4458 . . .	191 „	
4468 . . .	239 „	
4473 . . .	240 „	
4478 [1]) . .	285 „	
4480 . . .	286 „	
4484 . . .	287 „	
4486 [2]) . .	288 „	
4487 . . .	334 „	NR
4489 . . .	334 „	NR
4490 . . .	335 „	NR
4492 . . .	335 „	NR
4494 . . .	336 „	
4496 . . .	336 „	
4509 . . .	384 „	
4511 . . .	430 „	NR
4513 . . .	430 „	
4515 . . .	431 „	
4520 . . .	432 „	
4525 . . .	478 „	
4533 . . .	480 „	
4534 . . .	480 „	NR
4540 . . .	527 „	. . . 225
4547 . . .	573 „	NR
4548 . . .	573 „	
4550 . . .	574 „	. . . 39
4553 [3]) . .	574 „	
4557 . . .	575 „	
4558 . . .	576 „	
4559 . . .	116 (XLI)	NR
4560 [4]) . .	116 „	
4561 . . .	116 „	NR
4566 . . .	118 „	
4568 . . .	118 „	
4571 . . .	119 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4573 . . .	119 (XLI)	
4576 . . .	119 „	
4578 . . .	120 „	
4581 . . .	166 „	
4587 [5]) . .	262 „	
4590 . . .	168 „	
4593 . . .	215 „	
4596 . . .	215 „	. . . 138
4598 [6]) . .	216 „	
4601 . . .	216 „	
4603 . . .	262 „	NR
4607 [7]) . .	263 „	
4613 . . .	264 „	
4614 . . .	264 „	NR
4615 . . .	310 „	NR
4620 . . .	311 „	
4625 . . .	312 „	
4630 . . .	359 „	NR
4631 . . .	359 „	
4634 . . .	360 „	
4637 . . .	360 „	
4638 [8]) . .	360 „	
4640 . . .	406 „	
4641 . . .	407 „	NR
4644 . . .	407 „	
4647 . . .	408 „	
4657 . . .	454 „	
4660 . . .	455 „	NR
4664 [9]) . .	503 „	
4670 . . .	504 „	
4671 . . .	504 „	. . . 79
4672 . . .	504 „	
4673 . . .	504 „	
4674 . . .	504 „	
4680 . . .	550 „	. . . 141
4683 . . .	551 „	
4685 [10]) . .	552 „	NR
4686 . . .	552 „	NR
4688 . . .	598 „	
4690 . . .	598 „	
4695 . . .	600 „	

1) Vezi erata pag. 384, Vol. XL.

2) Vezi erata pag. 120, Vol. XLI.

3) I s'a dat o soluție la pag. 352, Vol. XLI. A se vedea nota dela pag. 302., Vol. XLII. Se așteaptă completarea soluției, pentru cazul p și q imaginari.

4) Vezi erata pag. 160, Vol. XLI.

5) Inlocuește problema 4587 dela pag. 168, Vol. XLI.

6) Vezi erata pag. 264, Vol. XLI.

7) Vezi erata pag. 312, Vol. XLI.

8) A se vedea și articolele dela pag. 288 și 401, vol. XXXVIII.

9) A se vedea și problema analoagă 5762 rezolvată la pag. 476, Vol. XLVIII.

10) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600, Vol. XLI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4696	600 (XLI)	NR
4697	600 „	
4698	600 „	NR
4703	647 „	
4705	647 „	
4706	647 „	
4710	648 „	
4717	55 (XLII)	
4720	56 „	
4722	56 „	
4726	110 „	
4729	111 „	
4731 [1])	112 „	
4734	112 „	
4741	167 „	
4742	167 „	
4745	168 „	. . . 472
4749	223 „	
4753	223 „	
4755	224 „	
4765	279 „	
4768	280 „	
4770	280 „	
4772	334 „	
4779	336 „	
4780	336 „	
4783	390 „	NR
4785	390 „	
4788 [2])	390 „	
4790	391 „	
4791	391 „	NR
4793	392 „	
4801	447 „	
4804	448 „	
4812	503 „	
4815	504 „	
4817	504 „	
4821	558 „	
4825	559 „	
4826	559 „	
4836	615 „	
4839 [3])	616 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4840	616 (XLII)	
4848	671 „	
4849	671 „	
4853	672 „	. . . 197
4854	672 „	
4859	55 (XLIII)	
4866	56 „	
4870	110 „	
4880	166 „	
4889	168 „	
4894	222 „	
4897	223 „	
4898	223 „	
4901	224 „	NR
4909	279 „	
4913	280 „	NR
4914 [4])	501 (XLV)	
4917	334 (XLIII)	
4922 [5])	335 „	NR
4923	335 „	
4928	390 „	
4929 [6])	390 „	NR
4937	392 „	NR
4938	392 „	NR
4940	446 „	
4944	447 „	
4946	447 „	
4949 [7])	448 „	NR
4953 [8])	614 „	NR
4954	502 „	
4955	503 „	
4958	503 „	
4962	504 „	
4967	559 „	
4968	559 „	
4969	559 „	
4973	560 „	
4974	560 „	
4977	614 „	
4981	615 „	
4984	616 „	
4985	616 „	

1) Vezi erata pag. 56, Vol. XLIII.

2) Problema rezolvată la pag. 611, Vol. XLII, este 4787, iar nu 4788. A se rectifica în consecinţă tabla de materii a Vol. XLII şi a volumelor următoare.

3) Vezi erata pag. 672, Vol. XLII.

4) Inlocueşte problema 4914, propusă la pag. 280, Vol. XLIII.

5) A se vedea şi articolul dela pag. 286, Vol. XLII.

6) Numărul problemei rezolvate la pag. 494 este 4926 iar nu 4929.

7) A se vedea punctul IV al articolului de la pag. 568, Vol. XLVI.

8) I s'a modificat enunţul dela pag. 502, Vol. XLIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
4989	670 (XLIII)	
4991 [1])	102 (XLVII)	
4992	671 (XLIII)	
4993	671 „	
4995	671 „	
4997	672 „	NR
5002	54 (XLIV)	
5006	55 „	
5009	55 „	NR
5010	56 „	
5012	56 „	
5013	56 „	
5016	109 „	
5021	110 „	
5022	111 „	
5026	112 „	
5027	112 „	
5028	112 „	NR
5030	166 „	
5031	166 „	
5033	166 „	
5034	167 „	
5037	167 „	NR
5040	168 „	
5043	168 „	NR
5046	222 „	
5049	222 „	. . .328
5051	223 „	
5052 [2])	223 „	
5053	223 „	NR
5054	223 „	
5059	277 „	
5060	277 „	
5064	278 „	
5068	278 „	
5069	279 „	
5072	280 „	
5073 [3])	280 „	NR
5074	334 „	
5075 [4])	335 „	
5076	335 „	
5079	335 „	
5082	335 „	
5085	336 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5086	336 (XLIV)	
5091	390 „	
5092	390 „	
5093	390 „	
5094	391 „	NR
5099	391 „	. . .473
5105	445 „	
5106	445 „	
5110	446 „	
5111	446 „	
5117	448 „	
5121	501 „	
5123	501 „	
5126	502 „	
5127	502 „	NR
5128	503 „	. . .331
5129	503 „	NR
5130	503 „	NR
5136	558 „	
5137	558 „	
5138	559 „	
5139	559 „	NR
5140	559 „	
5142	559 „	
5144	560 „	
5145	560 „	
5146	560 „	
5158	615 „	
5161	616 „	
5162 [5])	616 „	
5167	669 „	
5169	670 „	
5170	670 „	
5172	670 „	. . . 82
5173	671 „	
5177	672 „	
5178	672 „	NR
5182	53 (XLV)	
5183	53 „	
5184	54 „	NR
5192	55 „	
5196 [6])	109 „	NR
5197 [7])	110 „	
5200	110 „	. . .198

1) Inlocueşte problema 4991, propusă la pag. 670, Vol. XLVI. A e vedea şi erata pag. 152, Vol. XLVII.

2) Vezi erata pag. 336, Vol. XLIV.

3) Vezi erata pag. 448, Vol. XLIV.

4) Vezi erata pag. 392. Vol. XLIV.

5) Vezi erata pag. 672, Vol. XLIV.

6) A se vedea Vol. XLIX pag. 701, soluţia problemei 5716 analoagă cu 5196.

7) Vezi erata pag. 168, Vol. XLV.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5204	111 (XLV)	
5205	111 „	
5206	111 „	
5209	112 „	
5212	166 „	NR
5216	167 „	
5217	167 „	
5220	168 „	NR
5221	168 „	. . . 84
5226	221 „	
5227	221 „	
5230	221 „	NR
5234	222 „	
5236	223 „	
5242	278 „	. . . 87
5245	278 „	
5248	279 „	NR
5250	279 „	
5252	280 „	
5253	280 „	NR
5258	334 „	
5261	334 „	
5262 [1])	334 „	
5267	335 „	
5272	389 „	
5274	390 „	NR
5276	390 „	. . .289
5279	391 „	. . .475
5284	392 „	NR
5286	392 „	NR
5289	446 „	NR
5290	446 „	
5292	446 „	. . 200
5293 [2])	447 „	. . . 89
5294	447 „	
5295	447 „	NR
5296	447 „	
5298	448 „	NR
5309	503 „	
5312	503 „	
5318	557 „	
5320	557 „	. . .290
5322	558 „	
5324	558 „	
5325	558 „	
5326	558 „	
5327	559 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5332	613 (XLV)	
5333	613 „	
5334	614 „	
5335	614 „	
5339	615 „	. . . 42
5342	615 „	NR
5343	616 „	
5344	616 „	NR
5349	670 „	NR
5351	670 „	
5354	671 „	
5355	671 „	
5357	671 „	NR
5358	671 „	
5360	672 „	NR
5366	54 „	
5367	54 „	
5370	55 „	NR
5371	55 „	
5376	56 „	NR
5380 [3])	110 „	
5381 [4])	110 „	
5382	110 „	NR
5383	111 „	NR
5384	111 „	
5388	112 „	NR
5391	112 „	
5395	166 „	
5396	166 „	
5397	166 „	
5405	168 „	NR
5408	221 „	NR
5410	222 „	
5411	222 „	NR
5412	222 „	
5416	223 „	
5418	224 „	
5419	224 „	
5421	224 „	NR
5422	578 „	NR
5425	278 „	NR
5426 [5])	389 „	
5427	278 „	
5429	279 „	
5430	279 „	
5431	279 „	. . .152
5432	280 „	

1) Vezi erata pag. 392, Vol. XLV.
2) Vezi erata pag. 560, Vol. XLV.
3) Vezi erata pag. 168, Vol. XLVI.
4) Vezi complectarea enunțului la pag. 248, Vol. XLVII.
5) Inlocueşte problema 5426 dela pag. 278, Vol. XLVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost Propusă	Rezolvată
5433	280 (XLV)	
5435	280 „	
5440	334 „	
5441	334 „	
5443	335 „	
5448	336 „	NR
5449	336 „	
5450	336 „	NR
5453	389 „	. . . 45
5456	390 (XLVI)	
5458	390 „	
5459	391 „	
5460	391 „	NR
5462	391 „	NR
5465	392 „	
5466	392 „	NR
5467	445 „	
5470	446 „	NR
5472	446 „	NR
5475 [1])	502 „	
5478	447 „	
5479	448 „	NR
5481	448 „	NR
5484	503 „	NR
5485 [2])	503 „	
5487	503 „	
5489	503 „	
5490	503 „	NR
5491	504 „	
5492	504 „	
5493	504 „	
5494	504 „	
5496	504 „	
5497	557 „	NR
5498	557 „	NR
5500	558 „	
5502	558 „	
5503	558 „	
5506	559 „	
5508	560 „	
5509	560 „	
5512	614 „	
5513	614 „	NR
5514	615 „	NR
5515	615 „	NR
5516	615 „	NR
5517	615 „	
5519	616 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5520	616 (XLVI)	
5521 [3])	616 „	
5522	616 „	
5523 [4])	293 (XLVII)	. . . 339
5524	616 (XLVI)	
5525	616 „	NR
5527	664 „	
5528	669 „	NR
5533	670 „	. . . 154
5534	670 „	
5535	671 „	
5536	671 „	. . . 46
5538	671 „	NR
5539	671 „	
5540	672 „	. . . 157
5542	54 (XLVII)	NR
5545	54 „	
5547	55 „	
5548	55 „	NR
5551	55 „	
5554	56 „	
5558	102 „	
5560	103 „	NR
5561	103 „	
5563 [5])	103 „	
5564	103 „	
5567	104 „	
5568	104 „	NR
5571	150 „	
5572	151 „	
5573	151 „	
5574	151 „	
5576	151 „	
5577	152 „	
5578	152 „	
5581	199 „	
5582	199 „	NR
5583	199 „	
5585	199 „	
5588	200 „	. . . 332
5589	200 „	
5591	200 „	NR
5593	246 „	
5595	246 „	
5596	247 „	
5597	247 „	NR
5598	247 „	
5599	247 „	

1) Inlocueşte enunţul dela pag. 447, Vol. XLVI.
2) Vezi erata dela pag. 560, Vol. XLVI.
3) A se vedea erata de la pag. 672, Vol. XLVI.
4) Inlocueşte problema 5523 dela pag. 616, Vol. XLVI.
5) Vezi erata pag. 152, Vol. XLVII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5600	247 (XLVII)	
5601	248 „	
5602	248 „	
5607	204 „	
5608	294 „	
5609	295 „	
5612	295 „	
5615	296 „	
5616	296 „	
5619	342 „	
5620	342 „	
5621	343 „	
5622	343 „	
5623	343 „	
5624	343 „	
5625	343 „	
5632	390 „	
5633	390 „	NR
5934	390 „	
5635	391 „	
5636	391 „	NR
5638	392 „	. . . 432
5639	392 „	
5640	392 „	. . . 92
5643	438 „	
5646	439 „	
5647	439 „	NR
5649	439 „	
5650	439 „	
5651	440 „	NR
5655	486 „	NR
5657	486 „	. . . 94
5658	486 „	NR
5662	487 „	NR
5663	488 „	
5664	488 „	
5668	533 „	NR
5670	534 „	
5671	534 „	NR
5672	534 „	NR
5673	534 „	
5674	535 „	
5676	535 „	
5677 [1])	536 „	
5678	536 „	NR
5680	582 „	
5681	582 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5682	582 (XLVII)	NR
5683	583 „	
5684	583 „	. . . 159
5687	583 „	
5690	584 „	NR
5693	46 (XLVIII)	
5696	47 „	
5697	47 „	
5699	48 „	
5700	48 „	
5701	48 „	
5702	48 „	. . . 95
5704	93 „	
5707	94 „	
5708	94 „	
5709	94 „	NR
5712	95 „	
5713	96 „	NR
5715	142 „	NR
5719	143 „	
5721	143 „	
5724	144 „	
5728	190 „	NR
5729	190 „	. . . 98
5731	191 „	NR
5732	191 „	
5733 [2])	191 „	
5734 [3])	191 „	
5735	192 „	
5736 [4])	525 „	NR
5737 [5])	192 „	NR
5738	192 „	NR
5739	238 „	
5740	238 „	
5742	238 „	NR
5743	238 „	
5744	238 „	
5745	239 „	NR
5746	539 „	NR
5747	240 „	. . . 265
5748	240 „	NR
5749	240 „	NR
5751	286 „	NR
5752	286 „	
5757	287 „	NR
5758	287 „	
5759 [6])	288 „	NR

1) Vezi erata dela pag. 584, Vol. XLVII.
2) Vezi erata pag. 240, Vol. XLVIII.
3) Vezi erata pag. 240, Vol. XLVIII.
4) Inlocueşte enunţul dela pag. 192, Vol. XLVIII.
5) Vezi erata dela pag. 288, Vol. XLVIII.
6) Vezi erata pag. 384, Vol. XLVIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5764	334 (XLVIII)	
5765	334 „	
5766 [1])	335 „	NR
5767	335 „	
5769	335 „	. . . 48
5770	335 „	
5771	336 „	
5772	336 „	NR
5773	336 „	
5777	381 „	NR
5778	382 „	
5779	382 „	
5780	382 „	NR
5782	383 „	
5783	383 „	
5784	384 „	
5785	384 „	. . .401
5786	384 „	. . .100
5787	384 „	NR
5789	430 „	
5792	431 „	NR
5793	431 „	. . .476
5794	431 „	. . .102
5795	431 „	NR
5797	432 „	
5798	432 „	. . .435
5799	432 „	NR
5800	478 „	. . .437
5803	478 „	
5804	478 „	
5805	479 „	
5806	479 „	NR
5807	479 „	
5808	479 „	
5809	479 „	NR
5810	480 „	
5813	526 „	
5814	526 „	NR
5815	526 „	. . .361
5816	526 „	NR
5817	526 „	
5818	527 „	NR
5819	527 „	NR
5820	527 „	NR
5821	528 „	NR
5822	528 „	NR
5823	528 „	NR
5824	528 „	
5826	575 „	
5827	575 „	. . .362
5829	575 „	NR
5830	575 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5832	576 (XLVIII)	. .292
5834	576 „	NR
5835	576 „	
5838	54 (XLIX)	
5839	55 „	
5840	55 „	
5841	55 „	
5842	55 „	. . .161
5843	55 „	
5844	56 „	NR
5845	56 „	
5846	56 „	
5847	56 „	NR
5848	56 „	
5849	110 „	. . .162
5850	110 „	
5851	110 „	
5852	110 „	
5853	110 „	NR
5854	111 „	
5855	111 „	
5857	112 „	
5858	112 „	NR
5859	112 „	
5860	198 „	
5861	198 „	
5862	198 „	. . .104
5863	198 „	NR
5864	198 „	
5865	198 „	. . .294
5866	199 „	NR
5867	199 „	NR
5868	199 „	
5869	199 „	
5870	200 „	. . .201
5871	200 „	
5872	200 „	
5873	200 „	
5875	264 „	. . .227
5876	264 „	
5877	265 „	. . .229
5878	265 „	
5880	265 „	
5881	265 „	
5882	266 „	
5883	266 „	
5884	266 „	
5885	266 „	. . .105
5886	267 „	
5887	267 „	
5888	267 „	. . . 49
5889	267 „	

1) O problemă analoagă este problema 4357, rezolvată la pag. 693, Vol. XLIX.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5890	321 (XLIX)	
5891	321 „	.230
5892	322 „	NR
5893 [1])	376 „	
5894	322 „	.231
5895	322 „	
5896	322 „	.231
5897	322 „	
5898	323 „	362
5899	323 „	107
5900	323 „	
5901	323 „	NR
5902	324 „	NR
5903	324 „	
5904	324 „	233
5906	376 „	440
5907	377 „	
5908	377 „	
5910	377 „	NR
5911	378 „	
5912	378 „	
5913	378 „	
5914	378 „	
5915	379 „	
5916	379 „	441
5917	379 „	
5918	379 „	
5919	379 „	
5920	460 „	.477
5921	460 „	NR
5922	460 „	
5923	461 „	NR
5924	461 „	
5925	461 „	
5926	461 „	
5927	462 „	NR
5928	462 „	
5929	462 „	
5930	463 „	
5931	463 „	
5932	404 „	NR
5933	404 „	
5934	404 „	.402
5935	533 „	NR
5936	533 „	
5937	533 „	.296
5938	534 „	
5939	534 „	
5940	534 „	234
5941	534 „	
5942	534 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5943	535 (XLIX)	
5944	535 „	
5945	535 „	
5946	535 „	NR
5947	535 „	NR
5948	535 „	NR
5949	536 „	NR
5950	589 „	
5951	589 „	
5952	590 „	
5953	590 „	
5954	590 „	
5955	590 „	NR
5956	590 „	
5957	590 „	
5958	591 „	NR
5959	591 „	.442
5960	591 „	
5961	591 „	NR
5962	591 „	
5963	592 „	NR
5964	592 „	
5965	649 „	
5966	650 „	
5967	650 „	
5968	650 „	
5969	650 „	
5970	650 „	
5971	650 „	.203
5972	651 „	
5973	651 „	
5974	651 „	
5975	651 „	NR
5976	651 „	
5977	651 „	NR
5978	652 „	NR
5979	652 „	NR
5980	705 „	
5981	706 „	297
5982	706 „	
5983	706 „	
5984	706 „	
5985	707 „	
5986	707 „	
5987 [2])	707 „	
5988	707 „	
5989	707 „	NR
5990	707 „	
5991	708 „	
5992	708 „	NR
5993	708 „	

1) Completează enunțul dela pag. 322, Vol. XLIX.

2) A se vedea soluția problemei 2865 la pag. 392, Vol. L.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
5994	708 (XLIX)	NR
5995	762 „	
5996 [1])	762 „	
5997	763 „	
5998	763 „	NR
5999	763 „	
6000	763 „	NR
6001	764 „	NR
6002	764 „	. . 364
6003	764 „	NR
6004	764 „	NR
6005	764 „	
6006	53 (L)	
6007	53 „	
6008	53 „	
6009	53 „	
6010	54 „	NR
6011	54 „	
6012	54 „	
6013	55 „	
6014	55 „	NR
6015	55 „	
6016	55 „	
6017	56 „	
6018	56 „	NR
6019	56 „	
6020	56 „	NR
6021	110 „	
6022	110 „	NR
6023	110 „	NR
6024	110 „	
6025	110 „	
6026	110 „	
6027	111 „	
6028	111 „	NR
6029	111 „	. . 443
6030	111 „	NR
6031	112 „	
6032	112 „	NR
6033	112 „	
6034	112 „	NR
6035	112 „	NR
6036	112 „	
6037	165 „	
6038	165 „	NR
6039	165 „	
6040	166 „	
6041	166 „	
6042	166 „	
6043	166 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6044	166 (L)	
6045	167 „	
6046	167 „	. . 480
6047	167 „	
6048	167 „	
6049	167 „	
6050	168 „	
6051	205 „	
6052	205 „	
6053	205 „	
6054	205 „	NR
6055	205 „	
6056 [2])	238 „	NR
6057	206 „	NR
6058	206 „	
6059	206 „	NR
6060	207 „	. . . 481
6061	207 „	
6062	207 „	. . . 482
6063	208 „	
6064	208 „	NR
6065	208 „	
6066	238 „	
6067	238 „	
6068	239 „	NR
6069	239 „	
6070	239 „	
6071	239 „	
6072	239 „	
6073	240 „	
6074	240 „	NR
6075	270 „	NR
6076	270 „	NR
6077	270 „	
6078	270 „	
6079	271 „	
6080	272 „	
6081	272 „	NR
6082	272 „	
6083	272 „	
6084	303 „	
6085	303 „	
6086	303 „	
6087	303 „	
6088	304 „	
6089	304 „	. . 484
6090	304 „	NR
6091	304 „	
6092	304 „	
6093	334 „	

1) A se vedea articolul D-lui P. Boldescu dela pag. 410 Vol L.
2) Inlocueşte enunţul dela pag. 205, Vol. L.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă	Rezolvată
6094	334 (L)	
6095	335 „	NR
6096	335 „	
6097	336 „	
6098	336 „	NR
6099	336 „	
6100	336 „	
6101	336 „	
6102	366 „	
6103	367 „	NR
6104	367 „	NR
6105	367 „	
6106 [1])	406 „	NR
6107	368 „	
6108	368 „	NR
6109	368 „	NR
6110	368 „	
6111	368 „	
6112	406 „	
6113	406 „	NR
6114	407 „	NR
6115	407 „	NR
6116	407 (L)	NR
6117	408 „	
6118	408 „	NR
6119	408 „	NR
6120	446 „	NR
6121	446 „	NR
6122	447 „	NR
6123	447 „	NR
6124	447 „	
6125	447 „	
6126	448 „	NR
6127	448 „	NR
6128 [2])	448 „	NR
6129	487 „	NR
6130	487 „	NR
6131	487 „	NR
6132	487 „	NR
6133	488 „	NR
6134	488 „	NR
6135	488 „	NR
6136	488 „	NR
6137	488 „	NR

I. EXERCIŢII [3])

1. Repartizarea exerciţiilor pe materii

Aritmetica şi Teoria numerelor . . . . . 16(267), 17(268), 18(268), 26(334).
Geometria . . . . . 13(237), 24(302), 27(334), 28(365).
Algebra . . . . . 1(52, 2(52), 3(108), 7(164), 8(204), 10(235), 11(236), 15(238), 19(269), 21(300), 25(302), 29(360), 34(444), 35(445), 37(446), 38(486).
Trigonometria . . . . . 4(109), 6(164), 9(205), 13(236), 20(269), 22(301), 23(301), 26(302), 31(404).
Geometria analitică . . 5(163), 32(405).
Analiza şi calculul integral . . . . . 14(237), 30(404), 36(445).

1. Repartizarea exerciţiilor pe autori

M. Adam 10
D. Barbilian 28
I. A. Barbu . . . 8, 9, 17, 23, 26
M. R. Constantinescu. 6, 18, 22, 29, 34
M. D. Cotariu 4, 31, 35
A. H. Cubat 2, 7, 15
Oct. E. Gheorghiu 14, 19
V. Ghiţescu 30
Gh. A. Grigore 32
M. Grumăzescu 12
E. St. Iacob 11, 24
G-l G. I. Liteanu 27
C. Pantelimon 5, 13
Ad. I. Popescu 38
T. Stoicescu . 1, 16, 20, 21, 26, 33, 36
E. N. Wegener 3, 25, 37

1) Inlocueşte enunţul dela pag. 367, Vol. L.
2) Vezi erata dela pag. 488, Vol. L.
3) Numerele din paranteză indică pagina la care a fost propus exerciţiul al cărui număr precede paranteza.

J. TABLOUL NUMELOR

Abason E., 22.
Abramescu N., 6, 37, 38, 56, 72, 138, 246, 272, 424, 429, 450, 456, 488.
Adam M., 235, 239, 260, 270, 288, 424.
Alaci V., 6, 348, 353, 429.
Aldea N. N., 6.
Alexa Magda, 224.
Alexandrescu V. Victor, 84.
Alexiu I., 6.
Alinescu C., 196.
Amărăşteanu F. M., 7, 226.
Amfilochie din Hotin, 170, 409.
Anagnoste A., 196.
Andonie Gh., 7.
Andrei Gh. A., 160, 333.
Andronescu Pl., 7.
Angelescu A., 22, 246, 249, 370.
Angheluţă Th., 6, 7, 162, 348, 420, 450.
Antoniu Corn., 7.
Antoniu S. I., 5, 6, 7, 167, 201, 203, 369, 408, 427.
Apolonius, 289, 349, 358, 399, 400.
Arabu I. C., 84.
Argeşeanu C. G-l., 391.
Arghiriade Em., 5, 7, 429.
Armeanca I., 7.
Artin E., 346, 347.
Aubert, 292.
August G. H., 288, 469.
Avramescu A., 7, 138, 224.
Avramescu C., 7, 357.

Badea I. M., 185, 249.
Bădescu A. L., 7.
Bădescu R., 7, 56, 224, 345.
Bădulescu Alexandra, 7, 369.
Bădulescu I. V., 372.
Baidaff Ig. B., 7, 360, 361.
Bakonyi C. C., 95, 157, 332.
Bălăceanu Ing., 370.
Bălan G. Şt., 7.
Bălan I., 196.
Bălănescu I. Dr. G-l., 288.
Ballan E., 7.
Banciu I., 22, 357.
Baras R., 141, 151.
Barbaiani A. I., 196.
Barbaiani M., 357, 444, 481.
Barbălat R., 368, 487.
Barbilian D., 5, 7, 183, 188, 196, 255, 315, 335, 347, 354, 357, 358, 365, 366, 369.
Barbu A. I., 41, 162, 204, 205, 232, 250, 268, 300, 481.
Barbu Gh. I., 228.
Bărbulescu Fl., 345.
Bărbulescu C. V., 300, 481.
Bârzescu C. Al., 481.
Bârzescu M., 160, 162, 362.
Başturescu G., 354.
Bâţică C. I., 288.
Bazacov Gh., 8, 159, 273.
Bedreag C. C., 430.
Beneş P., 8.
Berdan C., 482, 486.
Bertrand J., 113, 425.
Biernaschi E., 359.
Biluseac G. Cl. 249, 372.
Blaha N., 196.
Blanchet A., 318.
Blind A., 288.
Bodnărescu M. H., 46, 84, 152.
Boerescu C., C-Amiral, 38, 469.
Bogdan Gr. Gh., 88, 223.
Boldescu R. P., 414.
Borneanu G., 8.
Borş C., 121, 469.
Botea G. Em., 6, 8.
Botea G. N., 22, 25, 225, 359, 360.
Botez Gh. I., 37, 224.
Botez St. M., 22, 76.
Botnariuc N., 341.
Bouligand G., 223.
Boutin, 48.
Brănescu G., 37.
Braşoveanu D. Gh., 163, 229, 232, 249, 297, 300, 365, 442, 482.
Brătilă Filofteia, 391.
Bratu Gh., 22.
Brauer R., 347.
Brehiu D., 273.
Brenner N. A., 8, 359.
Brianchon, 118, 130, 187, 471.
Brocard, 349.
Bruckner V., 8.
Brun Viggo, 245.
Bucurescu I. Cpt., 8.
Budeanu I. C., 8, 490.
Buiciiu Gh. G-l., 5, 6, 8, 41, 55, 112, 116, 133, 152, 161, 166, 196, 205, 231, 239, 265, 270, 284, 286, 303, 329, 334, 338, 359, 361, 366, 369, 385, 392, 397, 406, 430, 442, 447, 464, 476, 480, 487.
Bujor P., 429.
Bujoreanu N., 8.
Bunescu D. A., 5, 8, 33, 170, 348, 410, 462.
Bunescu D. E., 8.
Bungescu I. Col., 8.
Bungeţeanu Preduţa, 22.
Buradescu T., 8.
Buricel-Tecuciu Gh., 8.
Burileanu Şt. G-l., 8, 186, 188.
Buşilă Ad., 8.
Buşilă D. C., 9.
Buşilă G. I., 9.
Buşilă Oct., 273.
Buzdugan C., 430.
Buzescu M., 332.

Cahen E., 308.
Călugăreanu G., 185.
Cambureanu V. D., 9.
Cambureanu V. V., 9.
Cantor, 429.
Cantuniar I. Cr., 46, 162, 203, 231, 232, 250, 294, 363, 372, 441, 481.
Capriel H., 345.
Capriel I., 9.
Caracostea D. A., 9.
Carafoli E., 9, 223, 429.
Caramalău E., 49, 160, 403, 481.
Caraman E., 9, 196.
Caranfil G. N., 9, 32.
Cârdeiu D. Gh., 84.
Cârlănescu C., 9.
Carmichael R., 396.
Carnot L., 391.
Cârstea D. Marin, 232, 250, 300.
Cârstoiu I., 185, 223, 224.
Cartianu Gh., 9. 184.
Cassian Gh. G-l., 9.
Catalan, 309.
Catona V. de, 37.

Cauchois Yvette, 185.
Cazacu N. C., 9, 258.
Cazanacli V. P., 9.
Cerchez Th. V., 223.
Cesaro, 376.
Cetăţeanu St. 288, 480.
Ceva, 129.
Chiriac I. C., 401, 402.
Chintescu M. M., 84.
Chiraleu S. I., 481, 486.
Chiricescu V., 9.
Chiricuţă A., 9.
Chiţulescu I. I., 5, 6, 9, 131, 170, 369, 372.
Choquet G., 223.
Christescu S., 289.
Cioc D., 162.
Cioc M., 9.
Ciorăscu Fl., 224.
Ciorănescu I. N., 10, 224, 359, 369, 450, 487.
Ciorapciu F. M., 10.
Cirani W., 37.
Claudian V., 10.
Cocea Gh. Th., 198, 290, 407.
Cojanu G. Aurel, 364, 484.
Columbeanu D. P., 250, 365, 372, 436, 441, 444, 481, 486.
Comberousse Ch. de, 67.
Constantin N. Vladimir, 249.
Constantinescu D., 229.
Constantinescu George Ing. 10.
Constantinescu Gh. Prof., 397.
Constantinescu Gh. Gh., 5, 6, 10, 88.
Constantinescu N. Ilie, 41, 203, 231, 232, 234, 297, 363, 441.
Constantinescu I. M., 267.
Constantinescu D. Mircea, 300.
Constantinescu M. M., 204.
Constantinescu R. M., 136, 164, 228, 232, 235, 249, 268, 288, 295, 301, 304, 363, 365, 366, 371, 441, 444, 480, 481, 482, 486.
Constantinescu T., 10, 337, 338.
Constantinescu Z., 10.
Constantinescu-Bice V. C-dor, 288.
Corduneanu C., 403, 481.
Cortuşan J., 332.
Coşereanu N. I., 10, 469.
Coşniţă C., 48, 371, 391.
Costăchescu V. C. Cpt., 10, 402, 448.
Costescu G., 288.
Costescu G. I., 330.
Costinescu D., 10.
Cotariu D. M., 95, 101, 109, 160, 232, 267, 286, 335, 348, 354, 363, 364, 383, 404, 435, 436, 437, 441, 444, 445, 481, 486.
Coţifide S., 196.
Cozlovschi C. I., 391.
Crăciuneanu C. Cpt., 10.
Crapelet, 373.
Creţoiu P., 185, 223.
Cristescu V., 83, 169, 269, 409.
Cristodulo R., 196.
Cubat H. A., 52, 164, 231, 238, 267, 293, 430, 435, 436.
Culianu N., 409.
Cutianu, 317.

Dacian C., 224.
D'Alembert, 231, 429.
Damaschin V., 37.
Damian N. St., 295, 481.
Dănulescu G., 196.
Darboux G., 138, 475.
Dăscălescu Hr., 10.
David M., 429.
Davidescu Ana, 10.
Delannoy, 376.
Demetrescu G. 137, 185.
Denjoy A., 223.
Desargues, 187, 442.
Diaconescu D. I., 295.
Diaconescu Gh. V., 249.
Diaconescu-Arnou E., 185, 224.
Diaconu C. C., 229, 232, 235, 300, 363, 365, 441, 444, 480.
Dickson L. E., 347.
Didicescu P., 196.
Dincu D., 273.
Dinescu P. Al. T., 10.
Dirichlet, 244.
Dobrescu D. Andrei, 10, 224, 351, 455.
Donciu T. N., 10.
Donţu G. G., 99, 267, 332.
Dovgan V. Gh., 84.
Drăganu M., 223, 224.
Drăgescu Mariana, 224.
Drăghicescu P. C., 481.
Drăghicescu P. P., 24, 44, 47, 48, 49, 74, 84, 88, 89, 92, 101, 102, 108, 112, 138, 153, 154, 156, 159, 162, 183, 198, 201, 203, 218, 231, 232, 258, 266, 290, 292, 293, 294, 295, 303, 332, 363, 383, 400, 432, 435, 436, 441, 473, 476.
Dragomirescu-Buzne Ed. Maior, 10, 33, 34.
Drosescu Gh. I., 11.
Droz, 427, 428.
Duhamel, 331, 332.
Dulcescu M., 196.
Dumitrescu D., 196.
Dumitrescu A. D., 11.
Dumitrescu T. D., 218.
Dumitrescu I. Gh., 6, 11, 279.
Dumitrescu C. I., 11.
Dumitrescu F. Sorin, 249, 370.
Dumitrescu G. Tr., 160, 364.
Dumitrescu I., 102.
Dumitrescu C. I., 84.
Dumitrescu V., 481.
Dupuis J., 183.

Earhart Amelia, 224.
Eckstein V., 87.
Eddington A., 429.
Eftimie D. C., 95, 257, 398.
Enăchescu Gr. I., 95.
Eratosthene, 245.
Euclide, 371.
Euler, 49, 72, 129, 412, 465.

Farny, 427, 428.
Fatou P., 186.
Felix C. G-l., 11.
Fermat, 129, 185, 223, 256, 257, 258, 429.
Feuerbach, 48, 412, 465.
Filimon I., 365.
Filip, V. I., 481.
Filipescu Em. Gh., 22.
Fitting H., 347.
Florescu B. I., 35, 53, 61, 77, 78, 110, 134, 165, 205, 274, 307, 348, 385, 432.

Florescu M. U., 11, 196.
Florian Z., 11.
Focşeneanu I. M. Maior, 5, 6, 11, 328, 329, 331, 368, 473, 475.
Frattini G., 354.
Fulgeanu G. I., 84.
Fundăţeanu C. I., 22, 196.

Gabriel Marie, Frère (F. G. M.), 83, 173, 355.
Gabrielescu R., 11.
Gafencu Rodica, 11.
Gaiu Gh. N., 55, 387.
Gâlcă I. T., 11, 289, 317, 318.
Galileo Galilei, 224.
Gavrilescu A., 196.
Gauss, 311, 314, 358, 376, 476, 477.
Georgescu Calipso, 11.
Georgescu C C., 185, 223.
Georgescu Elena, 196.
Georgescu I. N., 11.
Georgescu N. N., 11.
Georgescu-Roegen N., 11, 278, 311, 336.
Georgescu-Roegen Otilia, 6, 11, 223, 369.
Georgescu-Val. N., 11.
Gheorghieş Al. G-l., 12.
Gergonne, 89.
Gheocalescu Al., 196.
Gheorghiu C. Ad., 5, 12, 45, 84, 154, 157, 196, 255, 264, 369, 470, 472.
Gheorghiu Al., 12.
Gheorghiu V. C., 37, 391.
Gheorghiu Th. Gh., 6, 12, 131, 196.
Gheorghiu S. I., 12.
Gheorghiu Justin, 37.
Gheorghiu A. Mircea, 12
Gheorghiu C. Oct., 290.
Gheorghiu E. Oct., 153, 237, 258, 269, 435.
Gheorghiu A. Şerb., 12, 55, 66, 112, 168, 196, 208, 223, 224, 271, 304, 336, 369, 407, 410, 447, 466.
Ghermănescu M., 5, 6 12, 25, 39, 41, 54, 76, 111, 161, 207, 224, 239, 249, 258, 268, 272, 288, 304, 316, 329, 331, 332, 336, 359, 361, 362, 368, 371, 372, 408, 429, 440, 441, 448, 463, 467, 481, 482.
Ghermani D., 12.
Ghica Al., 12.
Ghigulescu I., 196.
Ghika Al., 224, 450.
Ghimuş D. A. Col., 12.
Ghiolu D. Stavri, 12, 76.
Ghircoiaşu V. N., 12.
Ghişoiu I. P., 12, 432.
Ghiţescu Sp., 12.
Ghiţescu V., 5, 6, 12, 32, 111, 404, 442, 444, 447.
Giurgiuman I., 391.
Gloden A., 110.
Goilav Em., 223.
Goldiş I. Gh., 250, 369, 486.
Gongu I. R., 481.
Grigore A. Gh., 104, 162, 250, 300, 354, 363, 365, 405, 441, 480, 481.
Grigorescu C., 12.
Grigorescu Ion, 12.
Grumăzescu M., S-lt., 41, 82, 236.
Grünberg M., 196.
Guţu I. A., 13.
Guţu P. C-tin, 232, 363.
Guţu I. I., 13.
Gutzu V., 13.

Hadamard J., 186.
Hanganu D. M., 13.
Haret Sp. R., 249.
Harghel E. I., 444, 486.
Helmholz, 376.
Hessenberg, 429.
Hilbert D., 315.
Hölden, 420.
Hospital, 81, 165, 419, 433.
Huideş V. A., 481.

Iacob Caius, 37, 138, 391.
Iacob St. E. Maior, 95, 160, 203, 236, 302, 430, 435 476.
Iamandi G., 430.
Ianculescu R., 13.
Iensen, 420.
Ieşan Şt. Al., 46, 250, 288, 441, 481, 486.
Ignat Gh. M., 363.
Ilie D. M., 185.
Iliescu C. C., 203, 229, 230, 232, 235, 332, 361, 363, 481.
Iliescu Gh., 5, 13.
Iliescu Tr. G-l., 13.
Ioachimescu Gh. A., 22, 169, 260, 409, 420.
Ioachimescu A. Gh., 13.
Ioanovici A., 13, 224.
Ionescu Ad., 434.
Ionescu V. D., 8, 13, 131, 218, 256.
Ionescu P. H., 13, 432.
Ionescu Ion, 5, 6, 13, 37, 53, 61, 72, 77, 110, 169, 183, 205, 220, 224, 225, 237, 256, 284, 288, 317, 337, 354, 361, 364, 370, 371, 372, 409, 430, 431, 469, 477, 486.
Ionescu Napoleon, 469.
Ionescu V.N., 162, 267, 435.
Ionescu F. P., 100.
Ionescu I. Paul, 13.
Ionescu D. Stelian, 84.
Ionescu Tib., 13
Ionescu-Bujor C., 5, 6, 13, 25, 36, 54, 112, 197, 204, 207, 218, 226, 239, 272, 279, 284, 369, 391, 428.
Ionescu-Ţiu D. C. Cpt., 5, 6, 13, 369, 398, 399.
Ionescu-Zane D. Gh., 13.
Isopescul D., 288, 354, 430.
Istrati C. C-dor, 13.
Ivul G., 383.
Iuga G., 256.

Janet G., 391
Jeannel R., 391.
Jitariu P., 391, 430.
Jurist Gh. Vlad, 332, 361, 435.

Kaczmacz St., 249.
Kalantarov, 430.
Kaufmann N., 13, 431.
Kelett, 185.
Kiepert, 413.
Klein F., 186, 187.
Kleyer A., 76, 77, 225, 392, 430.
Klimpert R. 225.
Kodaira K., 347.
Konteschweller M., 224, 288.
Kramarenko, 342.
Krull W., 347.
Kummer, 257.

Lagrange, 122, 125, 256, 287, 417, 420, 422, 429, 440.

Laguerre, 187, 313.
Laisant A. C., 72, 309, 310, 311.
Lalescu Tr., 201, 235, 289, 290, 371.
Lamoth P., 14.
Laplace P. S., 223.
Lascu Bal., 14.
Lazăr Gh., 409.
Lazu C., 14.
Lefter D., 196.
Legendre M. A., 241, 318.
Lemoine E, 49, 106.
Leon Al. M., 162, 203, 249, 292, 300, 365, 369, 444, 481.
Leonida D., 14.
Leţia L. Valentin, 250, 371, 372.
Levi Civita, 186.
Linteş G. I. C-dor, 5, 14, 35, 37, 38, 45, 53, 73, 76, 104, 110, 116, 162, 163, 165. 184, 185, 205, 221, 223, 224, 229, 230, 238, 241, 242, 243, 244, 245, 288, 348, 368, 425, 426.
Liteanu I. Gh. G-l., 5, 6, 14, 260, 269, 334, 370, 401, 402.
Livada F. Gr., 14.
Livada G. M., 223.
Loria Gino, 223.
Lupescu Gh. C. 432.

Mac-Laurin, 470, 471.
Make, 377.
Malaxa C. Elena, 14.
Malaxa N., 14.
Malcoci C., 14.
Manafu V., 14.
Manoilescu M., 14
Manoilescu V., 196.
Manolache C. M., 51, 160, 267, 292.
Manoliu Sp. M., 106, 203, 228, 229, 230, 231, 232, 295, 297, 363, 442.
Mărăcine B., 12.
Marconi G., 288.
Marcovici N., 430.
Marcu O., 37, 429.
Marcu V., 185.
Marcus Eph., 223.
Mardare M., 481.
Mareş T., 14.
Mărgineanu I., 431.
Margulius M., 432, 472.
Maria, Regina, 185.
Marian V., 6, 14, 371.
Marinescu E. Em., 203, 295, 363, 365, 441, 444.
Marinescu C. Marinel, 250, 367, 371, 436.
Marinescu Gh. M., 185.
Marinescu C. Stelian, 232, 363
Mateescu Cr., 14, 58.
Mateescu Dan, 14.
Mătieş V. I., 14, 87, 167, 185, 205, 250, 253, 296, 297, 353, 367, 391, 432, 455, 462.
Maxim Al. I., 37.
Mavrodin D. D., 14.
Mehedincu V., 15.
Melinte N. L., 481.
Menelaus, 47, 129.
Mereuţă E., 15, 370.
Mereuţă V., 15.
Michel Ch., 196, 470, 474.
Miclescu A. Maior, 15.
Mihăescu C., 196.
Mihăiescu S. Şt., 15, 81, 106, 108, 447, 476, 477.
Mihăileanu N. N., 5, 6, 15, 48, 53, 92, 100, 102, 110, 135, 167, 205, 231, 234, 239, 264, 287, 294, 303, 367, 370, 410, 424, 431, 442, 464, 480.
Mihăilescu C. C. 165,
Mihăilescu Iordan, 373, 374.
Mihăilescu I. St., 162.
Mihalopol C., 15.
Mihoc Gh., 15, 420.
Mihu C., 15.
Minculescu A., 481.
Mineur Ad., 427, 428.
Miquel, 55, 254, 261, 264.
Mircea C., 196.
Mircea M. E., 15, 196.
Mirescu P., 15, 370, 472.
Mironescu Gh. Gh., 391. 469.
Mironescu V., 196.
Miroslav T., 162.
Mitescu C., 15.
Mititelu C. Cl., 15.
Mititelu C. I., 15.
Miu M. I., 15.
M'Kensie, 198.
Mocanu I. C., 84.
Mocnik F., 354.
Moisil Gr., 36.
Moivre, 130, 133.
Monge, 376.
Montel P., 371, 404.
Moraru I., 469.
Morţun Gh. Em., 15.
Moruzi Constanţa, 224.
Munteanu T. I., 249.
Munteanu Gh. L., 162, 361.
Murăroiu I., 56, 432.
Musta Şt., 456.
Mustăcescu V. Tr., 46, 203, 231, 232, 250, 295, 371, 481.
Myller A., 429.

Nache D. D., 362, 481, 482, 484.
Nadolu Gr., 435.
Nagel, 89.
Năstase Gh., 430.
Neamţu P., 15.
Negoescu N., 15.
Negrea A. M., 226.
Negrei V. G-l., 256, 257, 258.
Negru M., 391.
Negulici Th., 469.
Negură G. St., 15.
Neicu M., 16.
Nestor G. D., 16.
Newton, 80, 111.
Nichifor A. G., 16.
Nicolae M. George, 163, 203, 295, 363, 365, 435, 441, 481.
Nicolau Al., 16.
Nicolau H. C., 16, 359.
Nicolau T. M., 16, 196.
Nicolescu Miron, 16, 450.
Niculescu V. Al., 5, 6, 16, 383.
Niculescu Cr., 16.
Niculescu C. Mircea, 153, 154, 398.
Niculescu I. R., 16.
Niewenglowski B,, 476.
Niţescu Tr., 37.
Niţulescu I., 429.
Novacu Val., 16.
Noyer A., 427, 428.

Olteanu G., 358.
Oltramare, 326.
Onicescu O., 6, 16.
Oniga Gh. Th., 185.
Oprea D. Gh., 95.

Oprescu St., 196.
Oteteleşeanu Ruxandra, 185.
Orănescu O., 16, 359.
Orăşanu D. C., 16.
Orăşeanu Gr., 16.
Orha F. I., 247.

Păläceanu D. V., 46, 160, 162, 232, 284, 312, 361, 363.
Pană A., 196.
Pană C., 196.
Panait I., 249.
Panaite N. Th., 17.
Panaitescu Sc., 22.
Panaitopol P., 196.
Pantazi Al., 5, 6, 17, 279, 347, 369.
Pântea P. T., 95.
Pantelimon A. Al., 365.
Pantelimon V. C., 46, 84, 95, 101, 102, 153, 154, 159, 163, 203, 237, 267, 290, 293, 294, 295, 441, 443.
Papelier G., 45.
Papp C., 429.
Pappus, 117, 187, 442.
Pârvu A., 17, 84.
Pârvu I., 196.
Pârvulescu V. C., 267.
Păsărică Fl, 5, 17.
Pascal, 42, 130, 154, 155, 187, 313, 376.
Paşcanu Sergiu, 196.
Pătrăscioiu I. M., 228, 235, 267, 295, 300, 301, 363, 365, 442.
Pavel Dorin, 17, 185.
Pavica A. V., 250.
Peano G., 354.
Perlea G. D., 17.
Persu A., 17.
Petculescu D. M., 363, 441, 444, 486.
Petrescu Elizeu, 95.
Petrescu S. Gh., 17, 285.
Petrescu G., 137.
Petrescu Iulian, 44.
Petrescu P. Lt.-Col., 17.
Philipide M., 17.
Pintilescu V., 359.
Pitagora, 72, 363.
Pitiş L. N.-A., 95.
Piţigoi Gh. Victor, 250.
Plăcinţeanu I., 196.
Pletea Mircea, 84.
Poincaré, 376.
Poinsot, 223.
Pompeiu D., 223, 288, 348, 429, 450, 486.
Poncelet, 101, 175, 177, 207, 355, 356.
Poni P., 429.
Pop Em., 224.
Pop N., 359.
Popa N. A., 156.
Popa A. E., 37.
Popa V. I., 37, 185.
Popa D. M., 44, 153. 154, 184, 240, 290, 292, 332, 399, 424, 468.
Popescu I. Ad., 105, 382, 383, 435, 437, 447, 486.
Popescu I. Barbu, 232, 250, 364, 441, 482.
Popescu Corneliu, 432.
Popescu I. Gh. G-l, 62, 329, 357.
Popescu Gr. I., 342.
Popescu M. I. Maior, 17, 166.
Popescu Laelius, 37, 224.
Popescu M., 185.
Popescu Gh. M., 95, 154, 160.
Popescu Ştefan, 429.
Popescu M. Stelian, 232.
Popescu A. Victor, 17.
Popescu Valentin, 37, 185, 224, 288, 391, 469.
Popescu-Botoşani Gh., 17, 185.
Popescu-Zorica Al., 17, 196.
Popovăţ P., 185.
Popovici And., 391, 469.
Popovici C. C., 17, 196.
Popovici H., 249.
Popoviciu Tib., 6, 17, 54, 100, 166, 185, 207, 245, 270, 303, 318, 328, 334, 367, 408, 426, 448, 488.
Popp C., 224.
Popp N. C-dor., 17.
Popp I. Tr., 18, 370.
Portocală M., 18, 196.
Postelnicu R., 76.
Potopeanu Gh. G-l, 18.
Poulet P., 72.
Prager Em., 224.
Prange O., 77.
Praporgescu N., 18.
Prisiceanu M., 232, 363.
Procopiu Şt., 224, 391.
Profiri N., 18.
Progreseanu A. Al., 249.
Protopopescu Gr. Col., 18.
Provinceanu M., 18.
Ptolomeu, 129, 236.
Purica I., 332.

Raabe, 331, 332.
Racliş R., 185, 223, 429.
Rado Gh., 288, 391, 469.
Rădoi N., 95.
Radu M., 188, 254.
Rădulescu E. Dan, 249.
Rădulescu Eliade, 409,
Rădulescu I. M., 18.
Râmniceanu I. C., 359.
Răvăruţ M., 391.
Reischer L. H., 84.
Revici T., 18.
Reynold, 288.
Richard, 373.
Riemann, 185.
Rignaux, 33.
Ripianu D., 197, 201.
Rocca, 373.
Rogoz V., 232.
Rohr I. A., 41, 44, 84, 290, 291.
Rolea G. V., 84.
Rolle, 130.
Romaşcan G. Georgeta *), 6, 18, 76.
Roşca R., 185.
Roşu Al. Al., 5, 6, 18, 25, 312, 370.
Roşu V. C., 249.
Roşu V., 18.
Rouché E., 67.
Rusam F., 347.
Rusu L. M., 292.
Ruzvan I. T., 18.

Saegiu E., 196.
Sălăgeanu A., 18.
Sălcuţeanu Gh., 249.
Saligny M., 18.

*) Aceiaşi cu *Stănculescu Romaşcan Georgeta.*

Sâmbeanu D. G., 481.
Sandu R. T., 295.
Săpunaru S. Gh., 18.
Sarian M., 19.
Şaur I., 19.
Săvescu V., 196.
Savin C. I. Lt., 19. 359.
Schilleru-Dili C. I., 15, 79.
Schuler Fr. W., 77.
Scurtu I. I., 84.
Segal J., 84.
Segal Z., 481, 486.
Selagian A., 196.
Seni Cl., 95.
Seni A. Dinu, 249.
Şerban A. T., 398.
Şerban-Ulmeni V. D., 432.
Şerbănescu Gh. V., 19.
Sergescu B., 12, 57.
Sergescu P., 5, 6, 19, 38, 131, 138, 170, 285, 297, 304, 312, 317, 347, 354, 370, 371, 372, 383, 392, 410 425, 430, 449, 450, 484.
Servais Cl., 428.
Serret A. J., 289.
Sfinţescu I. C., 19.
Shoda K., 345, 347.
Silişteanu D. Dan, 232.
Simionescu D. G., 5, 6, 19, 154, 167, 207, 209, 279, 289, 292, 332, 336, 362, 369, 372, 383, 432, 435, 476, 478.
Simionescu I. Prof., 37.
Simionescu M., 19.
Simson T., 49, 112, 119, 152, 200, 424, 476, 477.
Şincai Gh., 170, 409.
Slăvescu V. M., 481.
Sleahtenea D., 19.
Smântânescu A., 19.
Soare V. M., 300, 365, 480.
Sotirescu N., 153, 154.
Şova C. I., 432.
Staicu I. C., 203, 232, 363, 486.
Stamate I. I., 19, 84, 94, 95, 161, 162, 304, 370, 406.
Stamatescu I. G., 19, 370.
Stamatescu I., 19, 370.
Stan I. A. Maior, 5, 6, 19, 33, 206, 336, 369, 407, 447.
Stan G. C., 481.
Stan A. D., 19, 25, 224.
Stancu S. Marin, 19.
Stancu S. Mircea, 20.
Stănculescu Romaşcan Georgeta *), 20.
Stănculescu I. I., 20.
Ştefănescu C., 354.
Ştefănescu E., 274, 275, 309.
Ştefănescu D. N. Lt., 20, 267.
Ştefănescu-Goangă A., 20.
Steiner, 36, 187.
Stewart, 129.
Stihi E. E., 223, 359.
Stoenescu I. Al., 6, 20, 49, 51, 95, 98, 112, 168, 184, 208, 233, 234, 240, 272, 370, 372, 402, 403, 462, 470, 473, 488.
Stoenescu D. Mirel, 46, 48, 49, 84, 95, 102.
Stoianovici I. Şerb., 46, 332.
Stoica D. Al., 20, 196.
Stoica V. D., 5, 20, 312, 370, 372.
Stoicescu T. T., 20, 52, 267, 269, 300, 334, 405, 445.
Stoika V. V., 20.
Stollov S., 429, 450.
Study, 313.
Stuparu C., 273.
Sturm Ch., 27.
Sudan G., 429.
Suhăţeanu - Bârlea Victor, 82.
Svilokosici R., 224.

Tănăsescu M. A. G-l, 20.
Tănăsescu S. C., 481.
Tănăsescu A. T., 20.
Tchebyceff, 113, 425.
Teodoreanu V., 20.
Teodorescu Al. Al., 249, 300.
Teodorescu C. C., 6, 20, 223, 288, 354, 370.
Teodorescu S. I., 357.
Teodorescu St. I., 138.
Teodorescu V. N., 22.
Theubner, 315.
Teodoriu L., 359.
Thabit Benn Korah, 183.
Thales, 353.
Thébault V., 41, 111, 141, 167, 183, 205, 256, 261, 264, 270, 385, 446, 463, 480.
Theodoru H., 20.
Thierrin H. G., 20.
Tigănoiu I. Al., 203.
Tilică C. Şt., 83.
Timotin A. A., 232, 300, 363, 365, 403, 481, 486.
Tincu C. C., 203, 363, 365.
Ţino N. O., 5, 6, 20, 138, 140, 200, 292, 425.
Ţintea M. I., 20, 391.
Ţipei N., 391.
Ţiţeica Gabriela, 6, 21, 56, 157, 159, 185, 208, 369, 372, 408, 425, 462, 470, 482, 484, 486.
Ţiţeica George, 22, 37, 169, 187, 359, 387, 409.
Ţiţeica G. Radu, 6, 21.
Ţiţeica Şerban, 6, 21.
Ţocu G. P., 24.
Tofan A., 481.
Tofan G. Mircea, 84.
Toma G. O., 481.
Tomescu Şt. I., 21.
Toporescu Er, 223.
Tripşa I. I., 249.
Tudoran M., 21.
Tudoran M. Lydia, 88.
Tullea C. Gh., 21, 196.
Turcu R. Sandu, 402.
Twain M., 233, 234.

Udrea A., 469.
Ulescu A., 21.
Ulic C., 196.

Văduva Fl. M., 88, 163, 202, 231, 363,
Vâlcovici V., 21, 126, 186, 223, 429, 466.
Valery P., 469.
Van Aubel, 89.
Vandiver H. S., 347.
Vardala I., 21, 224, 225.
Vargă I. A., 484, 486, 488.
Vasilache I., 21.
Vasilescu C. Gr., 21.

*) Aceiaşi cu *Romaşcan Georgeta.*

Vasilescu C. I, 21.
Vasilescu I. T., 21.
Vasilescu-Stabu A. M., 21, 83, 89, 95, 100, 151, 201, 238, 265, 293, 442.
Vasiliu C., 318.
Vasiliu G. Dan, 21.
Vasiliu G. D-tru, 23, 24, 92, 94, 153, 154, 156, 160, 203, 332, 435.
Vasiliu C. E., 21, 196.
Vasiliu D. Gh., 21.
Vasiliu I. Gh., 391.
Vasiliu C. I., 22, 200, 201, 370, 399, 400, 428, 431.
Vasiliu M., 22.
Vecsler B., 196.
Vernier H. M., 289.
Vescan T. T., 22, 76.
Viciu A. A., 22.
Vijelie Gh. E., 84, 476.
Vintilă E., 223.
Vişa E., 22, 353, 475, 476.
Vlad Mircea, 481.
Voinea P. R., 101, 154, 292, 402.
Vrânceanu G. Prof., 185, 186, 371, 450.
Vrânceanu Gh. Gh., 46, 78, 104, 162, 163, 187, 188, 203, 223, 229, 230, 249, 295, 300, 372, 437, 480, 486.

Wallace, 424.
Weddeburn M. J., 345, 347.
Wegener N. E., 81, 101, 102, 108, 138, 159, 203, 231, 267, 292, 295, 297, 300, 302, 361, 363, 364, 367, 406, 435, 441, 446, 472, 484.
Weierstrass K., 354.
Wilson, 129.
Witt E., 347.
Woinarovski R., 22.

Zamfirescu C. Gr., 22, 196.
Zamfirescu G. I. Cpt., 6, 22, 42, 55, 213.
Zapan Gh., 6, 22.
Zapan Gr. C-dor, 5, 6, 22.
Zlatcu St. C., 22.

K. LUCRĂRI CITATE *)

1. Cărţi, Extrase, Teze

		Pag.
A. Angelescu	Lecţiuni de calcul diferenţial	370
Th. Angheluţă	Algebra superioară	162, 420
A. Artin	Zür Theorie der Hyperkomplexen Zahlen.	347
V. I. Bădulescu	Table de logaritmi	372
D. Bodewig	Einführung in die Zahlentheorie.	34
R. Brauer	Über die algebraische Struktur von Schiefkörper	347
E. Cohen	Théorie des nombres	308
R. D. Carmichael	Analyse indéterminée	396
I. I. Chiţulescu	Culegere de probleme de geometrie descriptivă	372
C. Coşniţă	Coordonées barycentriques	48, 371, 372
V. Cristescu	Culegere de probleme de Trigonometrie	83, 90, 91, 269, 423, 424
E. L. Dickson	On finite algebras	347
I. Dumitriu	Culegere de probleme de geometrie analitică.	102
J. Dupuis	Tables des logarithmes à cinq décimales	183
H. Fitting	Die Theorie der Automorphismenringe	347
Gabriel Marie (F. G. M.)	Exercices de géometrie	173, 355
Gabriel Marie (F. G. M.)	Exercices de trigonometrie	83
M. Ghermănescu	Curs de albegră superioară	331, 440
M. Ghermănescu	Trigonometria plană şi sferică	25, 371, 372, 482
Hilbert	Grundlage der geometrie	315
A. G. Ioachimescu	Culegere de grobleme de algebră	260, 420, 421, 464

*) In acest capitol nu sunt trecute lucrările citate în *Bibliografie* şi la *Diverse:* Sporirea bibliotecii *Gazeta Matematică.*

		Pag.
I. Ionescu	Beton armat	371, 372
I. Ionescu	Maxime şi minime geometrice	371, 372
I. Ionescu	Povestiri technice	372
St. Kaczmarcz	Fundamenta mathematicae	249
K. Kodaira	Über die Struktur der endlichen Ordnung	347
W. Krull	Über verallgemeineste endliche Abelsche Gruppen	347
C. A. Laisant	Recueil de problèmes de mathémetiques	309
T. Lalescu	Calculul algebric	235, 372
T. Lalescu	La géometrie du triangle	201, 289, 290, 371
C-dor I. Linteş	Teoria indicatorilor	73
Gino Loria	Curve sghembe speciali	70
V. Marian	Elementele lui EUCLID	371
Ch. Michel	Compléments de géometrie moderne	196, 470, 474
P. Montel	Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes	371
B. Niewenglowski	Cours d'algèbre	486
O. Onicescu şi Gh. Mihoc.	Calculul probabilităţilor	420
G. Papelier	Exercices de géometrie moderne	45
Rouché et Comberousse	Traité de géometrie	67
F. Rusam	Matrizenringe mit Koeffizieren aus endlichen Ringen ganzer Zahlen	347
P. Sergescu	Quelques dates remarquables dans l'évolution des mathématiques en France	371, 372
K. Shoda	Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe	347
Ch. Sturm	Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique	25
G. Sugot	Balistique interieure théorique et tables numériques	371
G. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie	387
G. Ţiţeica	Culegere de probleme de geometrie analitică.	25
S. H. Vandiver	Non on an associative distributive Algebra in which the comutative law addition does not hold	347
Gh. Vrânceanu	Curs de geometrie analitică şi proiectivă	371
J. H. Weddeburn	A theorem on finite algebras	347
E. Witt	Über die Komutativität endlicher Schiefkörper	347
***	*Gazeta Matematică*, Volum jubilar	371, 372
***	Über die Einheitengruppen eines endlichen Ringes	347
***	Über die Konstruction der Schiefkörper	347
***	Über einer Satz von Herrn J. H. WEDDEBURN.	347

2. Periodice

Pag.

Boletin Matematico 361
Bulletin de la section scientifique de l'Académie Roumaine 241, 347
Bulletin de Mathématiques et de physique pures et appliquées 279
Curierul Matematic 475
Foaia matematică 430
Gazeta cărţilor 383
Gazeta Matematică . . . 5, 10, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 41, 49, 61, 62, 72, 87, 106, 107, 110, 116, 128, 131, 132, 133, 135, 169, 170, 184, 196, 211, 218, 220, 221, 222, 225, 240, 241, 242, 244, 246, 249, 250, 251, 253, 256, 258, 260, 268, 274, 275, 279, 284, 285, 298, 302, 305, 307, 309, 312, 313, 317, 329, 331. 335, 337, 345, 348, 357, 359, 361, 369, 370, 373, 374, 375, 376, 384, 385, 393, 395, 397, 406, 409, 410, 424, 425, 427, 430, 432, 437, 443, 446, 449, 455, 456, 463, 464, 467, 470, 476, 480, 488.
Gazeta Matematică, Supliment cu exerciţii 128
Jahresberict der Deutche Mathematische Vereinigung 347
Journal de mathématiques spéciales. 427
L'Intermédiaire des mathématiciens 374, 379
Mathematica 392
Mathesis 41, 264, 385, 427, 428, 463, 480
Pitagora 398
Proceedings. 347
Recreaţii Ştiinţifice 170
Revista de matematicas y fisica elementales 361
Revista Matematică din Timişoara 387, 432
Sitzungberichte der Heidelberger Akademie 347
Sphinx 33
Technica şi Viaţa 32, 33

L. ERATA

Pagina şi Volumul sau Problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea de făcut*
Pag. 22, Vol. L	112
„ 2 a copertei numărului 1 Vol. L	112
„ 89, 91, 92, 110	168
Prob. 5994 şi 6033	168
„ 6017 şi 6029	208
Pag. 467, 512, Vol. XLVIII	240
„ 566, 574, Vol. XLIX	240
„ 60, 61, Vol. L	240
„ 164, Vol. L	336
„ 327, Vol. L	368
„ 346, 347, 353, Vol. L	408
Prob. 2381	408
„ 5827	448
„ 6128	488

M. SUPLIMENTE

Supliment la Nr. 10. Darea de seamă asupra mesei comune care a încheiat al 34-lea concurs al *Gazetei Matematice* . . . . . 12 pagini

N. PUBLICAŢIUNI IN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

G. ŢIŢEICA . . . Culegere de probleme de geometrie analitică. Partea a II-a. Suplimentul cu exerciţii. Vol. XI. 9 numere . . . . . 148 pagini

Până la sfârşitul lunii precedente, s'au primit şi reţinut, după o primă examinare, următoarele: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Barbaiani A. M. (6067, 83, 86, 112, 17); *Braşoveanu D. Gh.* (5942, 6060, 79, 88, 112); *Chiraleu S. I.* (5926, 6086, 101); *Columbeanu D. P.* (6111, 12, 25); *Constantinescu R. M.* (4360, 5699, 900, 972, 6011, 70, 83, 84, 85, 87, 89, 99, 101, 05, 12, 17, 25); *Iacob St. E.* Maior (E); *Piţigoi Gh. V.* (5699, 813, 6087); *Popa C. Vasile* (6105); *Popescu I. Gh.* G-l (A); *Soare V. M.* (6112); *Teodorescu St. I.* (5502, 625, 6033); *Vargă I. A.* (5068, 971, 6062, 63, 82, 101, 05, 10, 12, 25); *Wegener E.* (4674, 914, 5650, 944, 6049, 73, 87).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie îngrijit cu cerneală **fără a se trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac pe o foaie aparte.

Corespondenţii care cer informaţii sau diverse lămuriri în scris, sunt rugaţi a însoţi cererea şi de o carte poştală sau mărci poştale suficiente pentru răspuns. Altfel cererea se clasează.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETA MATEMATICĂ“

Volumele vechi şi neepuizate ale revistei «*Gazeta Matematică*» se vând broşate cu preţul de 1000 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 100 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETA MATEMATICĂ“

Vol. I, II, IV, V, VI, VII, VIII, XVI, XVII şi XVIII sunt epuizate.

III. **N. Abramescu**, *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică*, Ediţia VIII-a . . . . . Lei 1.000

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica**, *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 100

X. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie* . . . . Lei 1.200

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 300

XII. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* Partea I, (Goniometrie). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (Lucrare premiată de Academia Română) . . . . . Lei 900

XIII. **I. Ionescu**, *Culegere de Probleme de Aritmetică.* Partea I. *Aritmetica raţionată* . . . . . Lei 1.500

XIV. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea II-a. (Trigonometria plană), Ediţia II-a, revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 700

XV. **A. G. Ioachimescu**, *Culegere de Probleme de Algebră*, Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 1.000

XIX. **V. Cristescu**, *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a. (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de *G-ralul Gh. I. Liteanu.* Lei 400

XX. **I. I. Chiţulescu**, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 600

XXI. **M. Ghermănescu**, *Trigonometria plană şi sferică cu aplicaţii la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* . . . Lei 1.500

XXII. **G. Ţiţeica**, *Culegere de Probleme de Geometrie Analitică*, Ediţia II-a, Partea II-a, adăogită de *N. G. Botea* şi *C. Ionescu-Bujor* . . . Lei 900

Biblioteca Istorică a „GAZETEI MATEMATICE“

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 600

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 700

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu; Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 500

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu**, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a) . . . . . Lei 600

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA“

I. **Ion Ionescu**, *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 600

Suplimentul cu Exerciţii { Abonamentul anual (9 numere). Lei 300 / Un an vechi (9 numere) . . . Lei 300

„Gazeta Matematică“ apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 1000 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimit pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei Nr. 158 — Bucureşti 2.
(Telefon: 7-3803).

C. 33.836.